

1976
8

Научно-популярный физико-математический журнал

DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.

CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT *Senatoris Tolosani.*

Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.



TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, e Regione Collegij Societatis Iesu.

M DC LXX.

Титульный лист латинского издания Диофанта с комментариями Баше де Мезириака и замечаниями Ферма. О Ферма мы рассказываем в статье на с. 3

Основан в 1970 году

1976

Квант

8

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР



Издательство „Наука" Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

Мы получили письмо от нашей читательницы из Крыма пятиклассницы Светы с эскизом рисунка, который вы видите на первой странице обложки. Такую фигуру она и ее товарищи чертили на занятии математического кружка. По эскизу, присланному Светой, была составлена программа для машины, «умеющей» рисовать. Сделанный машиной рисунок и приведен на обложке. Хотя фигура состоит только из отрезков прямых, на рисунке явно видны восемь кривых линий. Сумеете ли вы определить, что это за кривые? Правда, предупреждаем вас, что задача эта довольно трудная.

1601-1665

В этом номере мы отмечаем юбилей крупнейшего математика XVII века Пьера Ферма. Ферма внес вклад почти во все разделы математики XVII века. Его труды непосредственно предшествовали появлению исчисления бесконечно малых и теории вероятностей. Ферма заслуженно может быть отнесен и к числу создателей аналитической геометрии. Но особенно важное значение имеют его работы в теории чисел.

Пьеру Ферма посвящены три статьи этого номера. О жизни, научных интересах и открытиях Ферма рассказано в статье И. Башмаковой. В статье Б. Мартынова формулируется и доказывается для многочленов аналог Великой теоремы Ферма. Наконец, в статье Л. Турнянского рассказывается о единственной работе Ферма, посвященной физической проблеме — закону преломления света. И к этой проблеме Ферма подошел с чисто математической точки зрения: в ней он применил свой метод решения экстремальных задач. По существу это было первым применением в физике той области математики, которая теперь называется вариационным исчислением.



И. Башмакова

ПЬЕР ФЕРМА

Mi par di veder un gran lume.)*
П. Ферма

9 февраля 1665 г. в «Журнале Ученых» был помещен некролог Пьеру Ферма, в котором говорилось:

«Это был один из наиболее замечательных умов нашего века, такой универсальный гений и такой разносторонний, что если бы все ученые не воздали должное его необыкновенным заслугам, то трудно было бы поверить всем вещам, которые нужно о нем сказать, чтобы ничего не упустить в нашем похвальном слове».

И хотя уже при жизни Пьер Ферма был признан первым математиком своего времени, а после смерти слава его еще умножилась, о нем самом мы знаем очень мало.

Вот то немногое, что известно. Пьер родился в августе 1601 года на юге Франции в небольшом городке Бомон-де-Ломань, где его отец — Доминик Ферма — был «вторым консулом», т. е. чем-то вроде помощника мэра. Мать Пьера, Клер де Лонг, происходила из семьи юристов. Итак, Пьер Ферма принадлежал к «третьему сословию».

Доминик Ферма дал своему сыну очень солидное образование. В колледже родного города Пьер приобрел хорошее знание языков: латинского, греческого, испанского, итальянского и французского. Впоследствии он писал стихи на латинском, французском и испанском языках «с таким изяществом, как если бы он жил во времена Августа и провел большую часть своей жизни при дворе Франции или Мадрида».

Ферма славился как тонкий знаток античности. К нему обращались за консультациями по поводу трудных мест при издании греческих классиков. По общему мнению, он мог бы составить себе имя в области греческой филологии.

Однако всю силу своего гения Ферма направил на математические исследования. И все же он не был математиком-профессионалом. Ученые его времени не имели возможности посвятить себя любимой науке целиком. Виет был юристом и тайным советником французских королей, Декарт — офицером, Мерсенн и Кавальери — монахами. Ферма избирает юриспруденцию. Мы не знаем, в каком городе он изучал право. Эту честь оспаривают Тулуза и Бордо. Известно только, что степень бакалавра была ему присуждена в Орлеане. С 1630 года Ферма переселяется в Тулузу, где получает место советника в Парламенте (т. е. суде). О его юридической деятельности мы читаем в упоминавшемся уже «похвальном слове», что он выполнял ее «с большой добросовестностью и таким умением, что он славился как один из лучших юрисконсультов своего времени».

*) Мне кажется, что я вижу яркий свет (из письма к Мерсенну, 1640 г.).

В 1631 г. Ферма женился на своей дальней родственнице с материнской стороны — Луизе де Лонг. У Пьера и Луизы было пять детей, из которых старший — Самюэль — стал поэтом и ученым. Ему мы обязаны первым собранием сочинений Пьера Ферма, вышедшим в 1679 г. Пьер Ферма скончался 12 января 1665 года во время одной из деловых поездок.

Вот перечень тех сухих фактов, которые мы знаем о жизни этого замечательного математика.

К сожалению, Самюэль Ферма не оставил никаких воспоминаний об отце. Правда, жизнь ученого, как правило, бывает бедна внешними событиями. Основное ее содержание раскрывается только в творчестве, которое и составляет огромный духовный подвиг ученого.

Ни одна из работ Ферма не была опубликована при его жизни. Собрание сочинений, которое он неоднократно пытался подготовить, так и не было им написано. Однако нескольким трактатам он придал вполне законченный вид, и они стали известны в рукописи большинству современных ему ученых (это были трактаты по аналитической геометрии, о максимумах и минимумах и о квадратуре парабол и гипербол). Кроме этих трактатов осталась еще его обширная и чрезвычайно интересная переписка.

В XVII веке, когда еще не было специальных научных журналов («Журнал Ученых» был одним из первых, он начал выходить в 1665 году), переписка между учеными играла особую роль. В ней ставились задачи, сообщалось о методах их решения, обсуждались острые научные вопросы.

Корреспондентами Ферма были крупнейшие математики его времени: Р. Декарт, Этьен и Блез Паскаль, Б. Френикль де Бесси, Х. Гюйгенс, Э. Торричелли, Дж. Валлис. Письма посылались либо непосредственно адресату, либо в Париж аббату Мерсенну, который размножал их и посылал математикам, занимавшимся аналогичными вопросами. Но письма ведь почти никогда не бывают только короткими математическими мемуарами. Обычно в них проскальзывают живые чувства авторов, которые помогают воссоздать их образы.

Когда Ферма в 1636 году послал Мерсенну свой «Метод отыскания максимумов и минимумов», Декарт, не поняв метода Ферма, подверг его резкой критике. В июне 1638 года Ферма послал Мерсенну для пересылки Декарту новое, более подробное изложение своего метода. Письмо его сдержанно, но не без внутренней иронии: «...Таким образом, обнаруживается, что либо я плохо объяснился, либо г. Декарт плохо понял мое латинское сочинение... Я все же пошлю ему то, что уже написал, и он несомненно найдет там вещи, которые помогут ему отказаться от его мнения, будто я нашел этот метод случайно и его подлинные основания мне неизвестны...». Ферма ни разу не изменяет своему спокойному тону. Он чувствует свое глубокое превосходство как математика, поэтому не входит в мелочную полемику, а терпеливо старается растолковать свой метод, как это сделал бы учитель ученику.

Широкой публике (даже далекой от математики) Ферма известен прежде всего благодаря Великой теореме, носящей его имя. Однако Ферма занимался не только наиболее любимой им теорией чисел, к которой относится эта теорема, но и математическими проблемами, стоявшими в центре внимания ученых XVII века, а именно задачами определения максимумов и минимумов, нахождения касательных, вычисления площадей и длин дуг кривых, короче — теми вопросами, которые мы сейчас относим к математическому анализу. И здесь Ферма принадлежат самые крупные результаты, предшествующие созданию исчисления Ньютоном и Лейбницем. Кроме того, Ферма первый в новое время пришел к

идее координат и создал аналитическую геометрию. Он занимался также задачами теории вероятностей. Ферма не ограиичивался одиой только математикой: он занимался и физикой, где ему принадлежит открытие закона распространеиия света в иеоднородиой среде *).

Аналитическая геометрия

Одним из первых математических произведений Ферма было восстаиовление двух утерянных киит Аполлоиия «О плоских местах». Методы, которыми пользовался Аполлоний, мы бы сейчас отнесли к аналитической и проективиой геометрии. Одиако во времена Аполлоиия ие было еще буквениой символики, поэтому ему приходилось записывать алгебраические формулы и уравнения кривых геометрически. Например, наша формула $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ записывалась (и доказывалась!) древиими с помощью чертежа (рис. 1).

Основное отличие современых методов решения геометрических задач от методов Аполлоиия — в примеиении буквеиной алгебры. Первым, кто понял, как следует примеиить новую алгебру к задачам геометрии, был Ферма.

В 1636 г. появилось в рукописи его сочинение «Введеиие в изучеиие плоских и простраиствеииых мест» **), в котором последовательно строится аналитическая геометрия на плоскости. Еще при восстановлеиии киит Аполлония Ферма оцеиил преимущества метода координат и понял, что уравнение с одним неизвестным вполне определяет некоторое число, уравнение с двумя неизвестными — миожество точек иа плоскости (кривую), уравнение с тремя неизвестными —

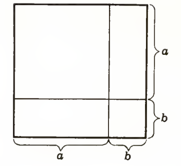


Рис. 1.

множество точек в пространстве (поверхность). Свое «Введение» Ферма иачииает с выбора в качестве осей координат двух прямых, которые пересекают друг друга под некоторым определеинным углом (не обязательно прямым).

По существу, ои показывает, что любое уравнение первой степеии между координатами. представляет прямую линию, а уравнение второй степени — некоторое коническое сечение, причем отмечает условие, при котором соответствующее геометрическое место будет окружностью. Для приведеиия уравнения второй степени к одиому из канонических видов, известных древним, Ферма применяет преобразование координат. Все изложеиие Ферма строго последовательно.

Годом позже вышло в свет сочинение Р. Декарта «Рассуждеиие о методе», четвертая часть которого «Геометрия» была также посвящеиа аиалитической геометрии. Это произведение затмило «Введение» Ферма, хотя с чисто математической точки зреиия оио было иаписано менее систематично. Дело в том, что Декарт создал новое, более удобное буквеиное исчислеиие, которым мы пользуемся с незначительными изменениями и сейчас, тогда как Ферма применял быстро устаревшую символику Виета. Кроме того, Декарт представил новую алгебру вместе с координатиым методом как «универсальиую математику», общий метод

*) «Квант», 1975, № 12, с. 30 н в этом номере — с. 17.

**) Под «плоскнмн местамн» Ферма, следуя древнням, поннмал прямые н окружности, под «пространственнымн местамн»— конические сечення.

для решения всех задач. Такая «реклама» не в меньшей мере, чем новая алгебра, способствовала популярности его произведения.

Квадратуры парабол и гипербол. Вычисление длин кривых

До Ферма систематические методы *квадратур*, т. е. вычисления площадей, разрабатывал итальянский ученый Б. Кавальери (1598—1647). Он написал довольно толстую книгу «Геометрия неделимых» (1635), в которой вычислялась площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, осью абсцисс и прямой $x = 1$. Впоследствии (1647) он вычислил аналогичные площади для парабол $y = x^3$, $y = x^4$, ..., $y = x^9$.

Но уже в 1642 г. Ферма открыл метод вычисления площадей фигур, ограниченных любыми «параболами» $y = ax^{p/q}$ $(p/q > 0)$ и любыми «гиперболами» $y = \frac{a}{x^{p/q}}$. Изложение Ферма занимало всего 10 страниц. Для «гиперболы», у которой $\frac{p}{q} > 1$, он впервые вычислил площадь неограниченной фигуры, расположенной между осью абсцисс, прямой $x = x_0$ и кривой (рис. 2). Таким образом, было показано, что площадь неограниченной фигуры может быть конечной.

Ферма, один из первых, занялся задачей спрямления кривых, т. е. вычислением длины их дуг. Он сумел свести эту задачу к вычислению некоторых площадей. Так, он показал, что вычисление длины дуги параболы $y^2 = 2px$ от точки (0, 0) до некоторой точки (x_1, y_1) (рис. 3) сводится к нахождению площади фигуры, ограниченной гиперболой $x^2 - y^2 = p^2$, осью ординат, осью абсцисс и прямой $y = y_1$ (рис. 4).

Ферма оставался только шаг, чтобы перейти от «площади» к абстрактному понятию «интеграла». Этот шаг был сделан Ньютоном и Лейбницем уже после его смерти.

Нахождение экстремумов. Определение касательных

Не позднее 1629 г. Ферма открыл методы нахождения экстремумов и касательных, которые с современной точки зрения сводятся к отысканию производной. В конце 1636 г. законченное изложение метода было передано Мерсенну и с ним могли позна-

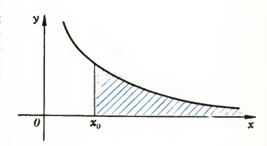


Рис. 2.

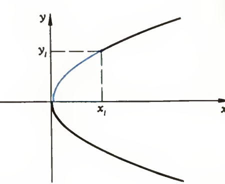


Рис. 3.

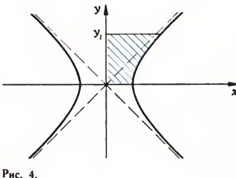


Рис. 4.

комиться все желающие. Он сообщил о своем методе и в письме к Декарту (1638 г.). Для нахождения экстремума многочлена $F(x)$ Ферма предлагает следующее правило: 1) подставляем в $F(x)$ вместо x выражение $x + h$; 2) приравниваем $F(x)$ и $F(x + h)$: $F(x) = F(x + h)$; 3) после приведения подобных членов сокращаем на h; 4) полагаем $h = 0$. В результате получаем равенство $A(x) = 0$. Ферма утверждает, что все значения x, при которых многочлен $F(x)$ имеет экстремум, необходимо являются корнями уравнения $A(x) = 0$. Сама функция $A(x)$, которая по правилу Ферма получается чисто алгебраически (т. е. без предельного перехода), теперь называется производной от $F(x)$.

Как Ферма обосновывал свое правило? Он предложил несколько различных обоснований. Приведем одно из них в несколько модернизированном виде. Пусть многочлен $F(x)$ достигает максимума в точке x_0. Это значит, что при небольших $h > 0$ имеем $F(x_0 + h) < F(x_0)$ и $F(x_0 - h) < F(x_0)$. Располагая члены многочленов $F(x_0 \pm h)$ по степеням h, получим систему:

$$\begin{cases} F(x_0) + h \cdot A(x_0) + \ldots \\ \ldots + h^n \cdot Q(x_0) < F(x_0), \\ F(x_0) - h \cdot A(x_0) + \ldots \\ \ldots + (-1)^n \cdot h^n \cdot Q(x_0) < F(x_0), \end{cases}$$

откуда

$$A(x_0) + h \cdot B(x_0) + \ldots + h^{n-1} \cdot Q(x_0) < 0,$$
$$-A(x_0) + h \cdot B(x_0) - \ldots + (-1)^n \cdot h^{n-1} \cdot Q(x_0) < 0.$$

Но при малых h знак суммы будет зависеть только от $A(x_0)$. Тогда из первого неравенства следует, что $A(x_0) \leqslant 0$, а из второго: $A(x_0) \geqslant 0$. Итак, необходимо, чтобы $A(x_0) = 0$.

Ферма дал также общий метод для определения того, будет ли точка x_0, в которой $A(x) = 0$, точкой максимума, минимума или точкой перегиба функции $y = F(x)$. С современной точки зрения метод был основан на рассмотрении второй производной.

Заметим, что все методы Ферма были вполне строгими. После него математики отбросили требование строгости и перешли к некритическому оперированию с бесконечно малыми величинами, определить которые они не умели. Строгие методы в математическом анализе появились вновь только в начале прошлого века в работах Гаусса и Коши.

Ферма первым увидел связь между задачами на отыскание экстремумов и задачами на определение касательных. Он дал метод нахождения последних, основанный на том же принципе, что и его метод экстремумов. Теперь в основе обоих методов лежит нахождение производной.

Дальнейшие успехи методов определения «площадей», с одной стороны, и «касательных и экстремумов», с другой, состояли в установлении их взаимной связи. Есть указания на то, что Ферма уже знал, что «задачи на площади» и «задачи на касательные» являются взаимно обратными. Но он нигде не развил свое открытие подробно. Поэтому честь его по праву принадлежит И. Барроу, И. Ньютону и Г. В. Лейбницу, которым это открытие и позволило создать дифференциальное и интегральное исчисление.

Теория чисел

Если в описанных нами работах Ферма исследовал вопросы, которые были в центре внимания и других математиков его времени (Кеплера, Кавальери, Торричелли, Блеза Паскаля, Валлиса), то в теории чисел он был первооткрывателем. Никто из его современников и никто из математиков, живших после него вплоть до Эйлера, не понимал ни значения поднятых им проблем, ни внутренней их связи.

От античности остались две большие работы, посвященные вопросам теории чисел: «Начала» Евклида

(III в. до н. э.) и «Арифметика» Диофанта (по-видимому, середина III в. н. э.). В первой из них были изложены элементы арифметики целых чисел, доказаны однозначность разложения на простые множители и бесконечность множества простых чисел.

«Арифметика» Диофанта до сих пор представляется одним из загадочнейших явлений в истории науки. По своему стилю она резко отличается от классических произведений Евклида, Архимеда и Аполлония. В ней вводились обозначения для неизвестного и первых его шести положительных и отрицательных степеней; кроме того, там были введены отрицательные числа и отличительный знак для них, соответствующий нашему минусу. При решении задач под «числом» понималось не натуральное число, как это было до него, а любое рациональное. Из 13 книг, составляющих «Арифметику», до нас дошло 6 *). Все они посвящены решению неопределенных уравнений в положительных рациональных числах. В этих книгах нет теорем теории чисел в собственном смысле слова, однако при решении задач иногда накладывались ограничения на те или иные целые числа, входящие в условие задачи. По существу, каждое такое «ограничение» представляло теорему теории чисел.

Долгое время замечательная книга Диофанта не была известна в Европе. Но в XVI в. рукопись ее нашли в библиотеке Ватикана и в конце того же века был издан ее латинский перевод (со множеством «темных мест», так как переводчик не был знаком с математикой). В 1621 году вышел новый перевод Баше де Мезириака, в котором приводился параллельный греческий текст и комментарии Баше. Эта книга и сделалась настольной

*) Недавно были найдены еще 4 книги на арабском языке, которые приписываются Диофанту.

для Ферма. Многие свои теоремы он вычитывал из нее, на другие его наводили размышления по поводу некоторых задач, и он записывал свои мысли и открытия на полях этой книги. Впоследствии все эти замечания были изданы *). Они составляют значительную часть его наследия по теории чисел. Другие его результаты в этой области сформулированы в письмах. Обычно он ставил их в виде проблем перед другими математиками.

Сам Ферма писал: «Арифметика имеет свою собственную область, теорию целых чисел, эта теория была лишь слегка затронута Евклидом и не была достаточно разработана его последователями (если только она не содержалась в тех книгах Диофанта, которых нас лишило разрушительное действие времени); арифметики, следовательно, должны ее развить или возобновить».

Несмотря на отсутствие доказательств (из них дошло только одно), трудно переоценить значение творчества Ферма для теории чисел. Ему одному удалось выделить из хаоса задач и частных вопросов, сразу же возникающих перед исследователем при изучении свойств целых чисел, те проблемы, которые стали центральными для всей классической теории чисел. Ему же принадлежит открытие мощного общего метода для доказательства теоретико-числовых предложений — так называемого метода неопределенного, или бесконечного, спуска (см. ниже). Поэтому Ферма по праву может считаться основоположником теории чисел.

Представление чисел квадратичными формами

Ферма поставил вопрос об определении вида целых чисел, которые представляются в виде суммы двух

*) Сейчас они имеются в переводе на русский язык в комментариях к «Арифметике» Диофанта.

квадратов, т. е. формой

$$x^2 + y^2, \qquad (1)$$

где x, y — целые.

К этому вопросу его привела одна из задач Диофанта. В ней были сформулированы условия, которым должно удовлетворять число a, чтобы оно представлялось формой (1), однако переписчики, не понимая смысла этих условий, неправильно их воспроизводили. Ко времени Ферма текст был безнадежно испорчен, и, чтобы его восстановить, ему пришлось решать задачу заново.

Читатель легко докажет, что числа вида $4n + 3$ не представимы формой (1). С другой стороны, числа вида $4n + 1$ могут быть как представимыми (например, $5 = 1^2 + 2^2$), так и непредставимыми (например, 21). Ферма догадался, что сначала надо исследовать, какие п р о с т ы е числа представляются формой (1). Он обнаружил, что все *простые* числа вида $4n + 1$ представляются формой (1), и притом единственным образом. (Это утверждение впоследствии было названо *первым дополнением к закону взаимности*.) Доказательство самого Ферма до нас не дошло. Никто из его современников также не сумел его провести. Первое доказательство было дано только Леонардом Эйлером.

Установив закон представимости простых чисел, Ферма уже легко доказал, что число a тогда и только тогда представимо формой (1), когда в его разложение на простые множители никакое простое число вида $4n + 3$ не входит в нечетной степени. Путеводной нитью для него послужило утверждение Диофанта о том, что произведение двух чисел, представимых формой (1), также представимо, и притом двумя различными способами, формой (1):

$$(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (xu + yv)^2 + (xv - yu)^2 = (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2.$$

От формы (1) Ферма перешел к рассмотрению форм $x^2 + 2y^2$, $x^2 - 2y^2$, $x^2 + 3y^2$. Он нашел вид простых чисел, представимых каждой из этих форм. Для формы $x^2 + 2y^2$ это будут простые числа вида $8n + 1$ и $8n + 3$. Простые же числа вида $8n + 5$ и $8n + 7$ такой формой не представляются. Это предложение получило название *второго дополнения к закону взаимности*. Оно было доказано Ж. Л. Лагранжем (1736—1813).

Эти работы Ферма положили начало плодотворным исследованиям Эйлера, Лагранжа и Лежандра. Итог всему предшествующему развитию этого вопроса подвел Гаусс, который в начале прошлого века создал стройную теорию квадратичных форм, т. е. форм вида $ax^2 + 2bxy + cy^2$, где a, b, c — целые. Оказалось, что вопрос о том, какие простые числа представимы квадратичными формами с одним и тем же дискриминантом $D = ac - b^2$, полностью решается с помощью квадратичного закона взаимности. Закон взаимности был открыт Эйлером, а затем вновь открыт и доказан Гауссом *).

Уравнение Пелля $x^2 - Ay^2 = 1$

Это уравнение (где A — натуральное число, не являющееся точным квадратом) решали в целых числах еще в древности. В новое время им заинтересовался Ферма **).

Он уже четко различал два вопроса, связанные с ним: найти *наименьшее* решение (x_0, y_0), т. е. решение с наименьшим $x_0 > 0$, и найти *все* решения, исходя из наименьшего.

В феврале 1657 г. в письме к английским математикам, которое получило название «второго вызова» («первый вызов» был отправлен в Англию

*) «Квант», 1973, № 1 и 1974, № 5, с. 30.

**) Название «уравнение Пелля» принадлежит Эйлеру. Исторически было бы справедливее назвать его уравнением Ферма.

в январе того же года), Ферма предложил доказать, что уравиеиие Пелля имеет бесконечно много решений. Ои предложил также решнть его прн A, равном 109, 149 н 433. Наименьшее решенне уравнеиия Пелля при таких значеннях A столь велико, что его иельзя найти подбором.

Математические вызовы в то время играли немалое значеине для поддержання чести нации. Так, в конце «первого вызова» Ферма пнсал:

«Я жду решення этнх вопросов; если оно не будет дано ни Англией, ни Бельгийской нлн Кельтской Галлией, то это будет сделаио Нарбонской Галлией...».

Английский математик лорд Броункер первым пришел к мысли, что для нахождения наименьшего решения уравнеиия Пелля надо разложить $\sqrt{A}$ в непрерывиую дробь и рассмотреть подходящие дроби к ией *). Впоследствнн этим уравнением заиялся Л. Эйлер, который понял, что решение Броункера основано иа периоднчиости непрерывной дроби для $\sqrt{A}$. Полиое доказательство этого факта н окончательный аиализ уравнения Пелля принадлежат Ж. Л. Лагранжу.

Малая теорема Ферма

В письме к Френиклю де Бесси от 18 октября 1640 г. Ферма высказал следующее утверждеиие: если число a ие делится на простое число p, то существует такой показатель λ, что $a^{\lambda}-1$ делится иа p, причем λ является делителем числа $p-1$. В частности, $a^{p-1}-1$ всегда делится на p. Это утверждение получнло назваиие *малой теоремы Ферма*. Оио является основиым во всей элемеитариой теории чисел.

Эйлер дал этой теореме несколько различных доказательств. Кроме того, Эйлер обобщил малую теорему на случай, когда число p является не простым, а любым целым, взаимно простым с a *).

*) «Квант», 1970, № 1 и № 8.

В поисках критерня для простоты чнсла Ферма от чисел вида $a^{\lambda}-1$ перешел к чнслам вида $a^{\lambda}+1$. Исследуя числа $2^{\lambda}+1$, он заметил что если $\lambda=2^{k}$, то прн $k=1, 2, 3, 4$ формула $2^{\lambda}+1$ дает простые чнсла. Он предположил, что это будет иметь место и при любом k. Это опроверг Эйлер, показав, что $2^{2^5}+1$ делится иа 641.

Великая теорема Ферма и «метод спуска»

В задаче 8 кннги II своей «Арифметнкн» Днофант поставил задачу представить даный квадрат a^2 в виде суммы двух рациоиальных квадратов. На полях, напротнв этой задачн, Ферма иапнсал:

«Наоборот, иевозможио разложнть нн куб на два куба, ни биквадрат на два биквадрата и, вообще, никакую степень, большую квадрата, на две степеии с тем же показателем. Я открыл этому поистине чудесное доказательство, но эти поля для него слишком узки».

Это и есть зиаменитая *Великая теорема*. В современных обозначеииях она утверждает, что уравиеиие $x^n+y^n=z^n$ при $n>2$ ие имеет решений в натуральных числах.

В своих письмах Ферма неодиократио предлагал доказать ее различным математнкам — но иикогда в таком общем внде, а только для случаев $n=3$ и $n=4$.

Теорема эта имела удивительную судьбу. В прошлом веке попытки доказать ее привели к построению очеиь тонких теорий, относящихся к арифметике алгебраических чисел. Без преувеличения можно сказать, что она сыграла в развитии теорнн чисел ие меньшую роль, чем задача решеиия уравнений в радикалах в алге-

*) «Квант», 1972, № 10.

бре. С той только разницей, что эта последняя проблема уже решена Э. Галуа, а Великая теорема до сих пор побуждает математиков к новым исследованиям.

С другой стороны, простота формулировки этой теоремы и загадочные слова о «чудесном доказательстве» ее привели к широкой популярности теоремы среди нематематиков и к образованию целой корпорации «ферматистов», у которых, по словам Г. Дэвенпорта, «смелость значительно превосходит их математические способности». Поэтому Великая теорема стоит на первом месте по числу данных ей неверных доказательств.

Сам Ферма оставил доказательство Великой теоремы для четвертых степеней.

В своем доказательстве Ферма применил «метод неопределенного или бесконечного спуска». Этот метод он описал в письме к Каркави (август 1659 г.) следующим образом:

«Если бы существовал некоторый прямоугольный треугольник в целых числах, который имел бы площадь, равную квадрату, то существовал бы другой треугольник, меньший этого, который обладал бы теми же свойствами. Если бы существовал второй, меньший первого, который имел бы то же свойство, то существовал бы, в силу подобного рассуждения, третий, меньший второго, который имел бы то же свойство, и, наконец, четвертый, пятый, спускаясь до бесконечности. Но, если задано число, то не существует бесконечности по спуску меньших его (я все время подразумеваю целые *) числа). Откуда следует, что не существует никакого прямоугольного треугольника с квадратной площадью».

Именно этим методом были доказаны многие предложения теории чисел.

В частности, с его помощью Леонард Эйлер дал новое доказательство Великой теоремы для $n = 4$, а спустя 20 лет и для $n = 3$. Дело в том, что последнее доказательство он смог провести только с помощью совершенно новых идей, а именно, обобщения понятия целого числа. Мы привыкли связывать это понятие только с натуральными числами, однако оказалось, что есть и другие математические объекты, которые ведут себя как целые числа. Среди этих объектов можно выделить «простые числа» и развить арифметику, аналогичную обычной. Такие числа называются теперь *целыми алгебраическими*. В прошлом веке Э. Куммер, занимаясь Великой теоремой, построил арифметику для целых алгебраических чисел определенного вида. Это позволило ему доказать Великую теорему для некоторого класса простых показателей n. В настоящее время справедливость Великой теоремы проверена для всех показателей $n \leqslant 5500$.

Отметим также, что Великая теорема тесно связана не только с алгебраической теорией чисел, но и с алгебраической геометрией, которая сейчас интенсивно развивается *).

В вышеупомянутом письме к Каркави, который после смерти Мерсенна занял его место в кружке парижских математиков, Ферма писал:

«Быть может, потомство будет признательно мне за то, что я показал ему, что Древние не все знали, и это может проникнуть в сознание тех, которые придут после меня для traditio lampadis ad filios **), как говорит великий канцлер Англии ***), следуя чувствам и девизу которого я добавлю: Multi pertransibunt et augebitur scientia ****)».

Это письмо получило название «Завещание Ферма».

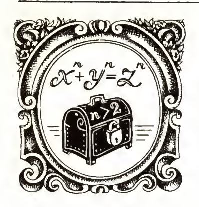
*) Говоря «целые», Ферма имел в виду «целые положительные» числа.

*) «Квант», 1972, № 8.

**) Передачи факела сыновьям.

***) Т. е. Френсис Бэкон.

****) Многие будут приходить и уходить, а наука обогащаться.



Б. Мартынов

ТЕОРЕМА ФЕРМА ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ

Все вы, конечно, слышали о Великой теореме Ферма; она сформулирована им для натуральных чисел. В этой статье доказывается теорема Ферма для многочленов. Эта статья трудная. Некоторые факты, используемые в ней, выходят за рамки школьной программы. Заинтересовавшиеся читатели найдут все необходимое в книге Р. Куранта и Г. Роббинса «Что такое математика» или во втором томе «Энциклопедии элементарной математики».

Постановка задачи

Предположение, высказанное Ферма, заключается в том, что уравнение $x^n + y^n = z^n$ при $n > 2$ не имеет решений в натуральных числах. Доказательство этого предположения для общего случая не найдено и по сей день.

Однако оказывается, что если заменить натуральные числа x, y и z многочленами от одной переменной t: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — и написать уравнение

$$[x(t)]^n + [y(t)]^n = [z(t)]^n, \quad (1)$$

то аналогичную теорему уже удается доказать.

Уточним постановку задачи. Прежде всего заметим, что многочлены $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ удовлетворяют уравнению (1) тогда и только тогда, когда ему удовлетворяют многочлены $p(t)\cdot x(t)$, $p(t)\cdot y(t)$ и $p(t)\cdot z(t)$ (здесь $p(t)$ — произвольный многочлен, отличный от нуля). Поэтому достаточно доказать, что не существует тройки в з а и м н о п р о с т ы х многочленов. Многочлены называются *взаимно простыми*, если они не имеют общего множителя, отличного от константы (константа — это многочлен нулевой степени). Кроме того, надо, конечно, исключить тривиальное решение: тройку многочленов нулевой степени, поскольку для любых a и b тройка

$$x(t) = a, \ y(t) = b, \ z(t) = \sqrt[n]{a^n + b^n},$$

очевидно, является решением уравнения Ферма.

Между прочим, при $n = 1$ уравнение (1) имеет решение например,

$$x(t) = t, \ y(t) = t + 1, \ z(t) = 2t + 1.$$

Имеет оно решение и при $n=2$. Легко проверить, например; что тройка

$$x(t) = t^2 - 1, \ y(t) = 2t, \ z(t) = t^2 + 1$$

является решением уравнения

$$[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = [z(t)]^2.$$

Целью статьи является доказательство аналога Великой теоремы Ферма для многочленов:

При $n > 2$ не существует трех взаимно простых многочленов $x(t)$,

$y(t)$, $z(t)$, из которых хотя бы один ненулевой степени, удовлетворяющих уравнению (1).

Заметим, что теорема верна для многочленов с любыми коэффициентами (целыми, рациональными, действительными или комплексными). Но какими бы ни были коэффициенты (пусть даже и целые), приводимое ниже доказательство существенно использует *комплексные числа.* Поэтому мы советуем вам прежде, чем читать дальше, познакомиться с этим разделом алгебры — например, по упомянутой книге Р. Куранта и Г. Роббинса, или же по второй части «Алгебры и элементарных функций» Е. С. Кочеткова и Е. С. Кочетковой (учебного пособия для учащихся 10 класса). А сейчас перечислим те факты, которые мы будем считать известными.

1*. *Во множестве комплексных чисел каждое число, отличное от нуля, имеет ровно n корней n-й степени.*

2*. а) *Во множестве комплексных чисел всякий многочлен n-й степени имеет в точности n корней* (если считать при этом каждый корень столько раз, какова его кратность).

б) *Если комплексные числа a_1, a_2, ..., a_n — корни многочлена n-й степени $x(t)$ со старшим коэффициентом, равным единице, то*

$$x(t) = (t - a_1)\cdot(t - a_2)\cdot\ldots\cdot(t - a_n).$$

Кроме того, нам понадобятся некоторые простые факты из теории делимости многочленов. Свойства делимости многочленов вполне аналогичны свойствам делимости целых чисел, поэтому читатель может переводить используемые факты на язык чисел и полностью доверять этому переводу *).

*) О делимости целых чисел в «Кванте» уже рассказывалось, правда,— давно: см. статью В. Н. Вагутена «Алгоритм Евклида и разложение на простые множители», «Квант», 1972, № 6, с. 30.

Самое важное из этих свойств — это аналог утверждения об однозначности разложения любого натурального числа в произведение простых множителей.

3*. *Любой многочлен степени $n \geqslant 1$ однозначно разлагается в произведение «простых» многочленов.*

Те читатели, которых заинтересует этот факт, найдут его строгую формулировку и доказательство в дополнении к статье.

Доказательство теоремы

Доказывать теорему будем «от противного». Допустим, что $n > 2$ и существуют три многочлена $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1°. Многочлены $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ взаимно просты.

2°. Выполняется равенство

$$[x(t)]^n + [y(t)]^n = [z(t)]^n.$$

3°. Хотя бы один из многочленов

$$x(t),\ y(t),\ z(t)$$

не является константой.

Из приведенных условий следует, что каждый из многочленов $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ не равен тождественно нулю.

В дальнейшем мы будем опускать букву t в записи всех встречающихся многочленов.

Мы будем действовать по следующему плану: вначале покажем, что существуют многочлены x_0, y_0, z_0, удовлетворяющие условиям 1°—3° и такие, что наибольшая из их степеней будет меньше, чем наибольшая из степеней многочленов x, y, z. Затем, повторив то же рассуждение, снова уменьшим наибольшую степень многочленов, образующих решение уравнения Ферма, и т. д. Ясно, что это не может продолжаться бесконечно, поскольку степень многочлена — натуральное число. Это противоречие и докажет теорему.

Разобьем наше доказательство на несколько этапов.

1. Из условий 1°—3° следует, что *каждые два из многочленов* x, y, z *тоже взаимно просты*. В самом деле, если, скажем, x и y имеют общий делитель d, то z^n делится на d^n, и тогда z делится на d, то есть d является общим множителем многочленов x, y и z. Это противоречит условию 1°.

2. *Пусть m — наибольшая из степеней многочленов* x, y, z (по условию 3° $m > 0$). *Можно считать, что степень m имеет многочлен z.* Действительно, исходное уравнение можно при желании сделать симметричным относительно x, y, z: надо заменить z на εz, где ε — комплексное число, n-я степень которого равна -1: $\varepsilon^n = -1$. Получим

$$x^n + y^n + z^n = 0.$$

3. *Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ — все различные корни n-й степени из числа* -1. (Мы пользуемся тем, что у всякого комплексного числа, отличного от нуля, есть ровно n различных корней n-й степени (см. п. 1*).) *Тогда многочлен $x^n + y^n$ раскладывается на множители*

$$x^n + y^n = (x - \varepsilon_1 y)(x - \varepsilon_2 y) \cdot \ldots \cdot (x - \varepsilon_n y).$$

Для доказательства можно поступить так: взять многочлен $u^n + 1$, корнями которого являются числа $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, разложить его на множители: $u^n + 1 = (u - \varepsilon_1)\cdot(u - \varepsilon_2)\cdot \ldots \cdot(u - \varepsilon_n)$ (п. 2*), а затем подставить вместо u дробь $\frac{x}{y}$ и освободиться от знаменателя.

4. *Многочлены $x - \varepsilon_i y$ попарно взаимно просты.* Действительно, если бы отличный от константы многочлен d был бы общим делителем многочленов $x - \varepsilon_i y$ и $x - \varepsilon_k y$ ($i \neq k$), то разность этих многочленов, равная $(\varepsilon_k - \varepsilon_i)\, y$, тоже делилась бы на d, а значит, и многочлен y делился бы на d (ведь $\varepsilon_k - \varepsilon_i$ — константа, отличная от нуля). Тогда и многочлен $x = (x - \varepsilon_i y) + \varepsilon_i y$ делился бы на многочлен d, что противоречит взаимной простоте x и y (п. 1).

5. *Если произведение попарно взаимно простых многочленов есть n-я степень, то каждый множитель есть n-я степень.* (Это — важное место; именно для его доказательства и нужен п. 3*. Попробуйте доказать п. 5 и аналогичное утверждение для целых чисел, используя однозначность их разложения на простые множители.

Доказательство п. 5 мы приводим в дополнении к статье.)

6. Так как $x^n + y^n = (x - \varepsilon_1 y) \times (x - \varepsilon_2 y) \ldots (x - \varepsilon_n y) = z^n$, и множители $x - \varepsilon_i y$ попарно взаимно просты, *каждый множитель $x - \varepsilon_i y$ есть n-я степень многочлена.* Пусть $x - \varepsilon_i y = u_i^n$, где u_i — многочлен. Обозначим степень многочлена u_i через m_i.

Выберем среди многочленов u_i тот, который имеет наибольшую степень. Будем считать, что наибольшую степень имеет многочлен u_1.

7. $m_1 < m$.

Действительно, очевидно, что $m_1 \leqslant m$ (напомним, что m — степень z). Если бы выполнялось равенство $m_1 = m$, то все остальные множители $x - \varepsilon_i y$ при $i > 1$ были бы константами. Возьмем $x - \varepsilon_2 y$ и $x - \varepsilon_3 y$ (это можно — ведь $n \geqslant 3$). Если $x - \varepsilon_2 y = A$, $x - \varepsilon_3 y = B$, то

$$(B - A)\, x - (B\varepsilon_2 - A\varepsilon_3)\, y = 0,$$

т. е. $x = Cy$ (ведь $A \neq B$ — докажите!), а это противоречит взаимной простоте x и y.

Заметим также, что $m_1 > 0$, т. е. u_1 — не константа.

Мы хотим от многочленов x, y, z перейти к трем многочленам без общего множителя, удовлетворяющим уравнению Ферма и имеющим максимальную степень, меньшую чем m. Покажем, что в качестве таких многочленов могут быть взяты многочлены u_1, u_2 и u_3 (см. п. 6), умноженные на некоторые константы.

8. Имеем:

$$\begin{cases} x-\varepsilon_1 y = u_1^n, \\ x-\varepsilon_2 y = u_2^n, \\ x-\varepsilon_3 y = u_3^n. \end{cases}$$

Подберем три числа c_1, c_2, c_3 (не все равные нулю) так, чтобы при сложении этих равенств с коэффициентами c_1, c_2, c_3 левая часть обратилась в нуль. Ясно, что для этого надо, чтобы выполнялась система

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=0, \\ c_1\varepsilon_1+c_2\varepsilon_2+c_3\varepsilon_3=0. \end{cases}$$

Найти хотя бы одно ненулевое ее решение легко — например, положить $c_3=1$ и решить полученную систему двух уравнений с двумя неизвестными. Проделайте это вычисление сами.

Найдя c_1, c_2 и c_3 получим

$$c_1u_1^n+c_2u_2^n+c_3u_3^n=0.$$

«Загоняя» коэффициенты под n-е степени, получим:

$$\left[\sqrt[n]{c_1}u_1\right]^n+\left[\sqrt[n]{c_2}u_2\right]^n=\left[\sqrt[n]{-c_3}u_3\right]^n.$$

Легко проверяется, что новые три многочлена удовлетворяют тем же условиям, что и x, y, z. При этом наибольшая степень их уменьшилась (оставаясь положительным числом).

Наш метод доказательства, придуманный еще Ферма, носит название метода *«бесконечного спуска»*. К сожалению, этот метод не проходит для доказательства неразрешимости уравнения Ферма в натуральных числах, поскольку на числа вида $x-\varepsilon_i y$, где x и y — целые числа, не переносится теорема об однозначности разложения на простые множители (см. п. 3*, с. 13). Исследованием этого интересного вопроса занимается «высшая арифметика» — *теория алгебраических чисел* — активно развивающаяся сейчас область математики.

Дополнение

А. Докажем утверждение, сформулированное в п. 3* статьи (см. с. 13), т. е. докажем, что *любой многочлен однозначно разлагается в произведение неприводимых многочленов* (с точностью до порядка множителей и до множителя, являющегося константой). (Неприводимый многочлен — это аналог простого числа в множестве натуральных чисел: многочлен q называется неприводимым, если его нельзя разложить в произведение многочленов ненулевой степени, отличных от q.)

Вначале покажем, что всякий многочлен можно разложить в произведение неприводимых. В самом деле, если Q — неприводим, то $Q=Q$, и все в порядке. Если же Q — приводим, то $Q=G_1\cdot G_2$, где G_1 и G_2 — какие-то многочлены. Если G_1 и G_2 — неприводимы, то нужное разложение получено; если же какой-то из G_i ($i=1, 2$) приводим, то снова $G_i=S_1^{(i)}\cdot S_2^{(i)}$, и т. д. Ясно, что этот процесс через конечное число шагов оборвется, поскольку степень многочлена Q конечна. Таким образом мы получим разложение многочлена в произведение неприводимых.

А теперь мы хотим доказать, что если для неприводимых многочленов выполнено равенство $p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_l=q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_s$, то $l=s$, и для каждого i найдется такое k, что $q_i=c\cdot p_k$. Для этого нам понадобится следующее вспомогательное утверждение: *если произведение $u\cdot v$ двух многочленов u и v делится на неприводимый многочлен q, то либо u, либо v делится на q.* Разделим многочлены u и v на многочлен q с остатком (пользуясь *алгоритмом Евклида*). Мы получим в остатке многочлены $\bar u$ и $\bar u$, степень каждого из которых меньше степени многочлена q, а произведение $\bar u\cdot\bar v$ делится на q. Нам нужно доказать, что либо $\bar u=0$ (тогда u делится на q), либо $\bar v=0$ (тогда v делится на q). Докажем это утверждение методом математической индукции (по степени многочлена q).

Б а з а и н д у к ц и и. Минимальная степень отличного от константы неприводимого многочлена равна 1. Пусть q — линейный многочлен. Тогда, если ни $\bar u\neq 0$, ни $\bar v\neq 0$, то $\bar u=\mathrm{const}$ и $\bar v=\mathrm{const}$. Но тогда и $u\cdot v$ — тоже константа, а потому $\bar u\cdot\bar v$ не может делиться на q. Поэтому для линейных неприводимых многочленов утверждение справедливо.

Ш а г и н д у к ц и и. Предположим, что утверждение справедливо для всех неприводимых многочленов степени меньшей, чем степень нашего многочлена q. Докажем его для многочлена q. Допустим, что $\bar u\cdot\bar v\neq 0$. Поскольку $\bar u\cdot\bar v$ делится на q, имеем: $\bar u\cdot\bar v=q\cdot\bar q$, $\bar q\neq 0$, и степень многочлена $\bar q$ строго меньше степени многочлена q (так как степень произведения $\bar u\cdot\bar v$ меньше удвоенной степени многочлена q). Разложим $\bar q$

в произведение неприводимых многочленов: $\bar{q} = \bar{q}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{q}_s$. Степень каждого многочлена $\bar{q}_i$ меньше степени многочлена q. Тогда $\bar{u} \cdot \bar{v} = q \cdot \bar{q}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{q}_s$. По предположению индукции, из того, что $\bar{u} \cdot \bar{v}$ делится на $\bar{q}_i$ (для каждого i), следует, что либо $\bar{u}$, либо $\bar{v}$ делится на $\bar{q}_i$. Последовательно сокращая произведение $\bar{u} \cdot \bar{v}$ на $\bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_i$, получим равенство $\tilde{u} \cdot \tilde{v} = q$ ($\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ — это многочлены, полученные из $\bar{u}$ и $\bar{v}$ соответствующими сокращениями на многочлены $\bar{q}_i$). Но q — непроводимый многочлен, поэтому либо $\tilde{u} = c \cdot q$, либо $\tilde{v} = c \cdot q$. Однако эти равенства выполняться не могут (из-за степеней рассматриваемых многочленов). Следовательно, предположение, что $\bar{u} \cdot \bar{v} \neq 0$, т. е. что $\bar{q} \neq 0$, неверно; значит, либо $\bar{u} = 0$, либо $\bar{v} = 0$, и утверждение доказано.

Докажем теперь однозначность разложения в произведение неприводимых многочленов. Имеем:

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_l = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s.$$

Положив $u = p_1$, $v = p_2 \cdot \ldots \cdot p_l$, получим, что либо u делится на q_1, и тогда $p_1 = cq_1$, поскольку p_1 — неприводим; либо v делится на q_1. Во втором случае положим $p_2 = u_1$, а $p_3 \cdot \ldots \cdot p_l = v_1$; получим, что либо $p_2 = c \cdot q_1$, либо $p_3 \cdot \ldots \cdot p_l$ делится на q_1, и т. д. до тех пор, пока не найдем номера i, для которого $p_i = c \cdot q_1$. Поступая аналогично с q_2, найдем такое k, что $p_k = c \cdot q_2$, и т. д., для всех $m = 1, \ldots, s$. Отсюда получаем также, что $l = s$.

Б. Покажем что если произведение попарно взаимно простых многочленов $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ равно n-й степени некоторого многочлена q: $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = q^n$, то каждый многочлен является n-й степенью некоторого многочлена $f_i : p_i = f_i^n$.

Разложим многочлен q на неприводимые многочлены: $q = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$. Тогда $q^n = q_1^n \cdot q_2^n \cdot \ldots \cdot q_m^n$. Возьмем многочлен p_1, и пусть p_{11} — неприводимый многочлен, входящий в его разложение. В силу однозначности разложения на неприводимые многочлены, p_{11} совпадает с каким-то многочленом q_l, то есть многочлен p_1 делится на q_l. Но многочлены p_i, где $i \neq 1$, на q_l не делятся (поскольку $p_1, \ldots, p_k$ попарно взаимно просты), а потому многочлен p_1 делится и на q_l^n, то есть $p_1 = q_l^n \cdot \bar{p}_1$. Применяя аналогичное рассуждение к многочлену $\bar{p}_1$, найдем, что $p_1 = q_l^n \cdot q_s^n \cdot \bar{\bar{p}}_1$, и т. д. (этот процесс оборвется из-за конечности степени p_1), пока не получим, что $p_1 = q_l^n \cdot q_s^n \cdot \ldots \cdot q_r^n = f_1^n$, где $f_1 = q_l \cdot q_s \cdot \ldots \cdot q_r$. Аналогично поступим и с остальными многочленами p_i; $i \neq 1$.

Задачи наших читателей

1. Дан треугольник ABC со сторонами a, b, c и медианами m_a, m_b, m_c. Доказать неравенства

а) $\dfrac{m_a^2}{a^2} + \dfrac{m_b^2}{b^2} + \dfrac{m_c^2}{c^2} \geqslant \dfrac{9}{4}$;

б) $\dfrac{m_a}{a} + \dfrac{m_b}{b} + \dfrac{m_c}{c} \geqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Когда в этих неравенствах достигается равенство?

2. Дан произвольный выпуклый четырехугольник $ABCD$ (возможно, вырожденный — две его вершины могут совпадать). Точки P, K, S, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Пусть $(AK) \cap (BN) = L$; $(KD) \cap (NC) = M$; $(PC) \cap (BS) = Q$; $(AS) \cap (PD) = T$. Доказать, что

а) $\dfrac{S_{KMNL}}{S_{ABCD}} \leqslant \dfrac{1}{3}$;

б) $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{S_{KMNL} + S_{PQST}}{S_{ABCD}} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

3. Снова $ABCD$ — произвольный выпуклый четырехугольник, точки E, F, G, H — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Обозначим $(AF) \cap (BG) = K$; $(BG) \cap (CH) = L$; $(CH) \cap (DE) = M$; $(DE) \cap (AF) = N$. Доказать, что

$$\frac{1}{6} \leqslant \frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} \leqslant \frac{1}{5}.$$

В. Матизен
(г. Новосибирск)



Л. Турянский

ПРИНЦИП ФЕРМА

История поисков закона преломления растянулась почти на два тысячелетия. Весь необходимый «инструмент» для открытия закона был в арсенале античных ученых. Так, Клавдий Птолемей (II в. н. э.) получил экспериментально довольно точные значения углов падения и преломления света. Он же составил первые таблицы значений тригонометрических функций. Но Птолемей пытался установить закономерность в соотношении углов падения и преломления и не догадался заменить углы их тригонометрическими функциями.

В последующие века вплоть до XVII исследованием преломления света занимались многие ученые. Среди них были и крупнейший оптик средневековья Ибн-ал-Хайтан (Альхазен), и создатель небесной механики великий Кеплер. Однако никому из них не удалось установить закона преломления света.

...В 1637 году аббат Мерсенн переслал Пьеру Ферма первые главы трактата Декарта «Диоптрика» с тем, чтобы Ферма высказал свое мнение об этом труде. Одна из глав была посвящена законам отражения и преломления.

Декарт рассматривает движение мяча, брошенного под углом на слабо натянутую сетку. Если мяч прорывает сетку, то направление движения его меняется. Пользуясь простыми геометрическими соображениями, Декарт получает соотношение между тригонометрическими функциями углов падения и преломления мяча:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \text{const}.$$

А затем, без каких-либо обоснований, он переносит это условие на случай распространения света при прохождении им границы двух сред *). Во времена Декарта считали, что более плотная среда всегда сильнее преломляет свет, и чтобы увязать с этим фактом свои теоретические результаты, Декарт заключает, что скорость света в более плотной среде больше, чем в менее плотной (что, конечно, не верно!). Надо сказать, что все физические рассуждения Декарта были очень неясными, и понять, что подразумевает Декарт под светом, невозможно.

Ферма отправил свой отзыв на «Диоптрику» Мерсенну. В нем он высказал, в основном, два замечания, касавшиеся вывода закона преломления. Ферма считал совершенно неправомерным перенос свойств дви-

*) Раньше Декарта закон преломления открыл голландский физик, математик и астроном Снеллаус. Однако, он нигде не опубликовал своих результатов.

жения брошенных тел на распространение света. Еще менее обоснованным, по мнению Ферма, являлось утверждение, что свет должен двигаться в более плотной среде с большей скоростью, чем в менее плотной. Из всего этого Ферма делает вывод, что формулировка закона преломления, приводимая Декартом, не верна.

Мерсенн переслал отзыв Ферма Декарту. Чтобы Декарт почувствовал авторитет рецензента, с работами которого он не был знаком, Мерсенн вложил в письмо еще и работу Ферма «О методе нахождения наибольших и наименьших значений». Это была та область математики, в которой Декарт имел значительные результаты и считал себя первопроходцем.

Ответ Декарта на рецензию был резким и во многом не справедливым. После обмена несколькими письмами каждая из сторон осталась при своем мнении, и дискуссия переключилась на метод нахождения наибольших и наименьших значений.

К оптической проблеме Ферма возвратился только через 20 лет, уже после смерти Декарта. Толчком для некоторых новых идей о пути установления закона преломления ему послужила книга по оптике его друга Кюро де ла Шамбра. В этой книге были приведены выводы законов отражения света на основе «принципа кратчайшего пути», сформулированного древнегреческим ученым Героном (I в. н. э.).

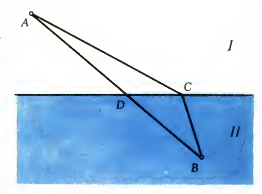
В трактате «Катоптрика» Герон, рассматривая отражение света от плоских и сферических зеркал, постулировал следующее утверждение: свет отражается таким образом, чтобы путь луча, падающего из данной точки и отражающегося в данную точку, был минимальным.

Однако во многих случаях свет этому принципу не следовал. В частности, при распространении света в неоднородной среде путь света от одной точки до другой оказывался далеко не минимальным.

Занявшись вновь поисками закона преломления, Ферма решил попытаться видоизменить принцип Герона. Основная его идея заключалась в следующем. «Кратчайшие» пути, выбираемые светом, следует понимать как самые «легкие», как пути, на которых свет испытывает наименьшее «сопротивление» со стороны среды, в которой он распространяется. Четкого физического объяснения этому «сопротивлению» Ферма не давал. Дело в том, что он считал распространение света мгновенным. Введение же понятия «сопротивление» несомненно вызывало представление о распространении света во времени. Это, конечно, понимал Ферма, но в нем говорил, прежде всего, математик. И обойдя этот вопрос туманными рассуждениями об «антипатии» света веществу, Ферма переходит к чисто математической постановке задачи.

Пусть луч света, выходящий из точки A в среде I (рис. 1), попадает в точку B в среде II. Разумеется, самый короткий путь между этими точками — это прямая AB. В этом случае свет проходил бы границу сред в точке D. Но если «сопротивление» сред I и II различно, то путь ADB может оказаться для света не самым легким.

Пусть, например, сопротивление, оказываемое свету средой I на единице пути, равно r, сопротивление, оказываемое средой II, равно



$r' = 2r$. Тогда полное сопротивление, испытываемое светом на пути ADB, равно, очевидно

$$r \cdot AD + 2r \cdot DB = r\,(AD + 2DB).$$

Если же предположить, что свет попадает из точки A в точку B по пути ACB, преломляясь в точке C (см. рис. 1), то полное сопротивление, испытываемое светом, равно

$$r \cdot AC + 2r \cdot CB = r\,(AC + 2CB).$$

Хотя $AD + DB$ всегда меньше $AC + CB$ (где бы ни лежала точка C), но $AC + 2CB$ может оказаться меньше, чем $AD + 2DB$. И свет, «руководствуясь» принципом наименьшего сопротивления, выбирает для себя такой путь, чтобы сумма $AC + 2CB$ была наименьшей.

Итак, Ферма свел проблему отыскания закона преломления к решению чисто геометрической задачи. Разумеется, мы проследили ход рассуждений Ферма довольно схематично, но главное, что мы пришли именно к такой формулировке задачи, какую дал Ферма: если свет попадает из точки A в среде I в точку B в среде II, сопротивление которой в k раз больше, чем сопротивление среды I, то для отыскания пути света надо найти такую точку C на границе раздела сред, чтобы сумма $AC + kCB$ была наименьшей из всех аналогично образуемых сумм.

В письме к де ла Шамбру Ферма писал: «Я согласен с Вами, что эта задача не из легких. Но поскольку природа решает ее во всех преломлениях, чтобы не отклониться от своего обычного образа действия, почему мы не можем взяться за эту задачу? Я заверяю Вас, что предложу решение этой задачи, когда это Вам будет угодно...» Однако сделать это оказалось далеко не просто, несмотря на то, что к тому времени Ферма разработал блестящий метод решения экстремальных задач (задач на нахождение наибольших и наименьших значений).

Еще прежде чем Ферма взялся за задачу применения своего метода к этой оптической проблеме, появилась некоторая помеха, которая едва не расхолодила его в самом начале пути. Ферма не признавал закона преломления, выведенного в свое время Декартом. Он считал, что решение задачи методом максимума и минимума с учетом принципа наименьшего сопротивления даст верный закон преломления света, который, несомненно, будет отличаться от результата Декарта. Однако многие ученые, с мнением которых Ферма считался, располагали к тому времени обширными экспериментальными данными, которые прекрасно согласовывались с соотношением Декарта. Это несколько обескураживало Ферма. Но в конце концов он пришел к мысленному заключению, что декартовское соотношение, хотя оно и не верно, может быть столь близким к действительному закону преломления, что заметить различие чрезвычайно трудно даже самому проницательному наблюдателю. Поэтому он решился атаковать проблему, несмотря на кажущийся приговор эксперимента.

На решение задачи ушло 4 года. Как же был удивлен Ферма, когда после трудоемких математических выкладок он получил то самое соотношение, которое надеялся опровергнуть:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \text{const!}$$

Результат Ферма подтверждал справедливость формулировки закона преломления, данной Декартом, а большинство физиков к тому времени не сомневались в ее абсолютной точности; принцип Ферма согласовывался с законами отражения света; и тем не менее, у многих он вызвал крайнее недоверие. Среди тех, кто ополчился на этот «злосчастный» принцип, был младший современник Ферма Гюйгенс. Его раздражала физическая незаконченность этого принципа и прежде всего неопределен-

ность понятия «сопротивление», полная неясность в вопросе о распространении света во времени. Но мы хотим еще раз подчеркнуть, что Ферма смотрел на эти вопросы сквозь пальцы, интересуясь исключительно математической стороной проблемы.

Очень скоро резкие суждения по поводу принципа Ферма стали смягчаться. Тот же Гюйгенс, повторив расчеты Ферма и убедившись в их безукоризненности, настолько уверовал в этот принцип, что при создании волновой теории света использовал этот замечательный «феномен Ферма».

Практически все дальнейшее развитие лучевой оптики и построение волновой оптики так или иначе было связано с принципом Ферма. По мере накопления экспериментальных и теоретических данных формулировка его уточнялась и видоизменялась. Установление зависимости скорости распространения света от плотности среды позволило выявить смысл константы в законе преломления:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n = \frac{v_1}{v_2},$$

где $n = v_1/v_2$—относительный показатель преломления, равный отношению скоростей света в средах *I* и *II* (см. рис. 1). Это устранило неясность, связанную с понятием сопротивления, и позволило сделать следующий шаг в определении путей распространения света: под «самыми легкими» путями следует понимать пути, для прохождения которых свету требуется наименьшее время. Однако в ряде случаев (в частности, при отражении от вогнутых зеркал) свет явно «предпочитал» максимальные по времени пути...

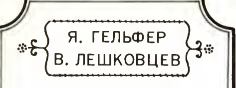
В конце концов принцип Ферма приобрел более общую формулировку, чем та, которую дал сам Ферма:

> свет распространяется по такому пути, оптическая длина которого экстремальна, то есть она либо максимальна из всех возможных, либо минимальна, либо остается постоянной.

Оптической длиной пути в случае однородной среды называют произведение геометрической длины пути s на абсолютный показатель преломления вещества: $l = ns$. Если среда неоднородна, то оптическая длина пути равна сумме оптических длин в различных участках, показатели преломления в которых постоянны.

Принцип Ферма оказался первым четко и сознательно сформулированным экстремальным, или точнее, вариационным принципом.

И. Бернулли в конце XVIII века с помощью принципа Ферма решил задачу о брахистохроне — кривой кратчайшего спуска. (Мы рассказывали об этом в 12 номере нашего журнала за 1975 год.) Мопертюи и Эйлер в XVIII веке, отправляясь от того же принципа Ферма, открыли вариационный принцип в механике. Гамильтон в XIX веке создал обобщенный вариационный принцип и для механики, и для оптики. Современная теория квантовой механики основывается на принципе Гамильтона. Таким образом, принцип Ферма явился родоначальником целого семейства вариационных принципов в физике, и его влияние прослеживается плоть до наших дней. И в заключение мы предлагаем вам попытаться, основываясь на принципе Ферма, вывести законы отражения и преломления света.



АМЕДЕО АВОГАДРО



к 200-летию со дня рождения

В его жизни внешне не было ничего выдающегося.

М. Джуа. «История химии»

Лоренцо Романо Амедео Карло Авогадро ди Кваренья э ди Черрето родился 9 августа 1776 года в Турине — столице итальянской провинции Пьемонт в семье служащего судебного ведомства Филиппо Авогадро. Амедео был третьим из восьми детей. Предки его с XII века состояли на службе католической церкви адвокатами, и по традиции того времени их профессии и должности передавались по наследству. Когда пришла пора выбирать профессию, Амедео также занялся юриспруденцией. В этой науке он быстро преуспел и уже в двадцать лет получил ученую степень доктора церковного законоведения.

Юридическая практика не увлекла Амедео, его интересы были далеки от юриспруденции. В юношеские годы он недолго посещал так называемую школу геометрии и экспериментальной физики. Она-то и пробудила в нем любовь к этим наукам. Но, не получив достаточно систематических знаний, он вынужден был заняться самообразованием. Когда ему уже исполнилось 25 лет, он стал все свободное время посвящать изучению физико-математических наук. Трудолюбие и настойчивость принесли свои плоды: в 1803 и 1804 годах он, совместно со своим братом Феличе, представил в Туринскую академию наук две работы, посвященные теории электрических и электрохимических явлений, за что и был избран в 1804 году членом-корреспондентом этой академии. В первой работе под названием «Аналитическая заметка об электричестве» он объяснял поведение проводников и диэлектриков в электрическом поле, в частности, явление поляризации диэлектриков. Высказанные им идеи получили затем более полное развитие в работах других ученых.

В 1806 году Авогадро получает место репетитора в Туринском лицее, а затем, в 1809 году, переводится преподавателем физики и математики в лицей города Верчелли, в котором он проработал около десяти лет. В этот период он знакомится с огромным количеством научной литературы, делая многочисленные выписки из прочитанных книг и журнальных статей. Эти выписки, которые он не прекращал вести до конца своих дней, составили 75 томов примерно по 700 страниц в каждом! Содержание этих томов свидетельствует об энциклопедичности интересов Авогадро, о колоссальной работе, которую он проделал, «переквалифицируясь» из юриста в физика.

В сентябре 1819 года Авогадро избирается членом Туринской академии наук. К этому времени он уже приобрел известность в кругу своих коллег работами в области молекулярной теории, электричества и химии. В 1820 году королевским указом Авогадро назначается первым профессором новой кафедры высшей физики (теперь бы мы сказали — математической физики) в Туринский университет.

Интересны взгляды Авогадро на преподавание физики, высказанные им при занятии этой должности. Итальянская наука в это время была еще очень слабо развита. Стремясь к тому, чтобы помочь своей родине сравняться по уровню развития естественных наук с другими европейскими странами, Авогадро наметил обширный план действий. Основная его идея заключалась в необходимости сочетания преподавания с научной деятельностью. Для этого надо организовать при кафедре физики два кабинета — один для учебных занятий, другой для проверки научных открытий и проведения оригинальных исследований. Это особенно важно для тех студентов, которые решат посвятить себя преподавательской деятельности в области физико-математических наук. Научный кабинет должен быть укомплектован современными приборами и соответствующим штатом сотрудников. Весьма важно также, чтобы на приобретение новых приборов регулярно отпускались необходимые суммы, которые руководитель кафедры мог бы тратить по своему усмотрению, представляя лишь письменный отчет о произведенных расходах. Кроме того, необходим научный журнал, в котором местные физики могли бы публиковать свои исследования.

Этим прогрессивным идеям не суждено было осуществиться из-за военных и политических событий в Италии начала двадцатых годов. В 1822 году, после студенческих волнений, Туринский университет был на целый год закрыт властями, а ряд его новых кафедр, в том числе и кафедра высшей физики, ликвидированы. Тем не менее, в 1923 году Авогадро получает почетный титул заслуженного профессора высшей физики и назначается старшим инспектором в палату по контролю за государственными расходами (должность финансово-юридическая, весьма далекая от науки. Вспомним, тем не менее, что Исаак Ньютон долгие годы был директором монетного двора!). Несмотря на новые обязанности, Авогадро продолжал заниматься научными исследованиями.

В 1832 году Туринский университет вновь получил кафедру высшей физики, но ее предложили не Авогадро, а известному французскому математику Огюстену Луи Коши, покинувшему родину в 1830 году. Только спустя два года, после отъезда Коши, Авогадро смог занять эту кафедру, где и проработал до 1850 года. В этом году он ушел из университета, передав кафедру своему ученику Феличе Кью.

Свою семейную жизнь Авогадро устроил довольно поздно, когда ему было уже за тридцать. Работая в Верчелли, он познакомился с будущей женой Анной Марией Маццье ди Джузеппе, дочерью нотариуса,

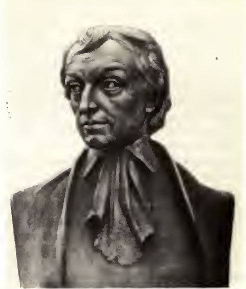
которая была моложе его на 18 лет. От этого брака он имел восемь детей — двоих сыновей и шесть дочерей. Никто из них не унаследовал его профессии.

Современники в своих воспоминаниях рисуют Авогадро как человека очень скромного, впечатлительного и обаятельного. Они отмечают его доброжелательность, искренность в обращении с другими людьми. «Высокообразованный без педантизма, мудрый без чванливости, презирающий роскошь, не заботящийся о богатстве, не стремящийся к почестям, безразличный к собственным заслугам и собственной известности, скромный, умеренный, доброжелательный» — так характеризует Авогадро один из его современников. По своему безразличию к почестям он представлял редкое исключение среди ученых того времени.

После ухода из университета Авогадро некоторое время занимал должность старшего инспектора Контрольной палаты, а также состоял членом Высшей статистической комиссии, Высшего совета народного образования и председателем Комиссии мер и весов. Несмотря на почтенный возраст, он продолжал публиковать свои исследования в трудах Туринской академии наук. Последняя его работа вышла из печати за три года до смерти, когда Авогадро исполнилось 77 лет. Он умер в Турине 9 июля 1856 года и похоронен в семейном склепе в Верчелли. На следующий год после смерти Авогадро в знак признания его заслуг перед наукой в Туринском университете был установлен его бронзовый бюст.

Чем же обогатил науку, в частности физику и химию, за свою долгую жизнь этот замечательный человек?

Нет ничего удивительного в том, что Авогадро начал свою научную деятельность именно с изучения электрических явлений. Электричество и магнетизм давно уже привлекали внимание ученых. Этот интерес особенно



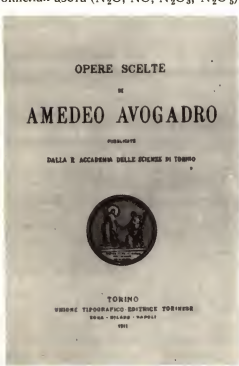
Бронзовый бюст Авогадро, установленный в Туринском университете.

усилился после того, как Вольта в 1800 году изобрел первый источник электрического тока (вольтов столб), а также в связи с дискуссией между Гальвани и Вольта о природе электричества. Эти вопросы находились на переднем крае науки того времени, и естественно, что молодой Авогадро решил попробовать свои силы именно здесь. Работы Авогадро, посвященные разным проблемам электричества, появлялись вплоть до 1846 года. Большое внимание уделял он также исследованиям в области электрохимии, пытаясь найти связь между электрическими и химическими явлениями, что привело его к созданию своеобразной электрохимической теории. В этом отношении его исследования соприкасались с работами знаменитых химиков Дэви и Берцелиуса. Но в историю физики Авогадро вошел как открыватель одного из важнейших законов молекулярной физики.

Почти до самого конца XVIII века химия не знала никаких количественных законов. Первым таким законом стал закон сохранения массы

участвующих в реакции веществ, открытый М. В. Ломоносовым в 1756 году и независимо от него Лавуазье в 1774 году. В начале XIX века были открыты еще два закона — закон постоянства состава и закон кратных отношений. Первый из них утверждает, что каким бы путем ни было получено данное химическое соединение, состав его всегда один и тот же. Иными словами, при образовании данного сложного вещества элементы, из которых оно состоит, всегда соединяются друг с другом так, что их массы находятся в строго определенном отношении. Например, в воде отношение масс водорода и кислорода всегда равно 1:8.

Второй закон указывает, что в различных химических соединениях, образованных одними и теми же элементами, массы этих элементов относятся друг к другу как небольшие целые числа. Например, в различных окислах азота (N_2O, NO, N_2O_3, N_2O_5)


OPERE SCELTE

AMEDEO AVOGADRO

DALLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO

TORINO
UNIONE TIPOGRAFICO-EDITRICE TORINESE

Титульный лист «Избранных трудов» Авогадро, изданных в 1911 году.

массы кислорода и азота относятся друг к другу как 1:2, 1:1, 3:2, 5:2.

Для объяснения этих законов знаменитый английский химик Дальтон выдвинул гипотезу о том, что все простые вещества (элементы) состоят из простых атомов, а сложные — из «сложных атомов», которые при химических реакциях могут распадаться на атомы простых веществ. До этого в химии не существовало четкого разграничения понятий «атом» и «молекула». Оба эти понятия были слиты воедино в термине «частица», которая рассматривалась как бесструктурная единица вещества. Дальтон составил первую таблицу относительных атомных масс элементов, приняв атомную массу водорода за единицу. (Как показал позднее Авогадро, эта таблица была неверной, так как Дальтон считал, что газообразный водород участвует в реакциях в виде одноатомного вещества (H), а в действительности реакции происходят с участием молекулярного водорода (H_2). По этой же причине оказались неправильными представления Дальтона о составе молекул.)

В 1808 году французский ученый Гей-Люссак, изучая реакции между газами, установил, что объемы вступающих в реакцию газов и газообразных продуктов реакции относятся как небольшие целые числа. (Конечно, при этом все объемы должны быть измерены при одинаковых давлениях и температурах). Например, в реакции образования водяного пара объемы водорода, кислорода и паров воды относятся как 2:1:2, т. е.

2 объема водорода	+	1 объем кислорода	=	2 объема водяного пара

В реакции образования хлористого водорода объемы водорода, хлора и продуктов реакции относятся как 1:1:2, т. е.

1 объем водорода	+	1 объем хлора	=	2 объема хлористого водорода

Согласно представлениям Дальтона указанные реакции должны были выглядеть так:

$$2H+O=H_2O, \quad H+Cl=HCl.$$

При этом должно было бы образоваться по одному объему паров воды и хлористого водорода. Так что согласовать опытные данные Гей-Люссака с теорией Дальтона было невозможно.

В такой ситуации и появилась в 1811 году статья Авогадро «Очерк метода определения относительных масс элементарных молекул тел и пропорций, согласно которым они входят в соединения». Излагая основные представления молекулярной теории, Авогадро показал, что она не только не противоречит данным, полученным Гей-Люссаком, но напротив, прекрасно согласуется с ними и открывает возможность точного определения атомных масс, состава молекул и характера происходящих химических реакций. Для этого прежде всего необходимо предположить, что молекулы водорода, кислорода, хлора и некоторых других простых веществ состоят не из одного, а из двух атомов.

В этой же работе Авогадро пришел к следующему важному заключению: «...число... молекул всегда одно и то же в одинаковых объемах любых газов». (Разумеется, что объемы измерены при одинаковых давлениях и температурах.)

Далее он писал, что теперь «имеется средство очень легкого определения относительных масс молекул тел, которые можно получить в газообразном состоянии, и относительного числа молекул в соединениях».

В самом деле, отношение масс молекул таково же, как и отношение плотностей газов при одинаковых давлениях и температурах. Если у нас есть два разных газа, массы которых равны M_1 и M_2, а объемы, измеренные при одинаковых температурах и давлениях, соответственно V_1 и V_2, то, следуя Авогадро, мы можем написать такое соотношение:

$$\frac{M_1}{M_2}=\frac{m_1N_1}{m_2N_2}, \qquad (1)$$

где m_1 и m_2 — массы молекул первого и второго газов, а N_1 и N_2 — число таких молекул в объемах V_1 и V_2. Разделив в этом выражении числители обеих дробей на V_1, а знаменатели на V_2, получим:

$$\frac{\frac{M_1}{V_1}}{\frac{M_2}{V_2}}=\frac{m_1\frac{N_1}{V_1}}{m_2\frac{N_2}{V_2}}. \qquad (2)$$

Но M_1/V_1 и M_2/V_2 — плотности газов ρ_1 и ρ_2, а N_1/V_1 и N_2/V_2 — числа молекул в единице объема. Согласно Авогадро $\frac{N_1}{V_1}=\frac{N_2}{V_2}$. При этом соотношение (2) принимает следующий вид:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{m_1}{m_2}.$$

Авогадро приводит такой пример: плотности кислорода и водорода равны 1,10359 и 0,07321 (за единицу принята плотность атмосферного воздуха). Следовательно, отношение масс молекул кислорода и водорода примерно равно $\frac{1,10359}{0,07321}\approx\frac{15}{1}$ *).

Из опытов Гей-Люссака следует, что для образования двух каких-либо одинаковых объемов водяного пара необходимо два таких же объема водорода и один объем кислорода. Значит, на каждую молекулу кислорода приходится по две молекулы водорода. Если бы молекулы водорода и кислорода состояли из одного атома, то мы имели бы реакцию $2H+O=H_2O$, в результате которой из двух объемов водорода и одного объема кислорода получился бы один объем воды. Но это противоречит результатам опытов Гей-Люссака. Следовательно, приходится предположить

*) По более точным данным масса молекулы кислорода в 16 раз больше массы молекулы водорода.

что в каждом элементарном акте реакции возникает по две молекулы воды ($2H_2O$), а молекулы кислорода и водорода содержат по два атома (O_2 и H_2). Так мы приходим к правильной формуле реакции:

$$2H_2+O_2=2H_2O.$$

Эта хорошо нам знакомая формула впервые была получена Авогадро.

В 1814 году появляется вторая статья Авогадро «Очерк об относительных массах молекул простых тел, или предполагаемых плотностях их газа, и о конституции некоторых из их соединений». Здесь четко формулируется закон Авогадро: «...равные объемы газообразных веществ при одинаковых давлениях и температурах отвечают равному числу молекул, так что плотности различных газов представляют собою меру масс молекул соответствующих газов». Далее в статье рассматриваются приложения этого закона для определения состава молекул многочисленных неорганических веществ.

Так как молярная масса (масса одного моля вещества) пропорциональна массе отдельной молекулы, то закон Авогадро можно сформулировать как утверждение, что моль любого вещества в газообразном состоянии при одинаковых температурах и давлениях занимает один и тот же объем. Как показали эксперименты, при нормальных условиях ($p=1$ *атм*, $t=0$°С) он равен 22,414 *л*. Число молекул в грамм-молекуле любого вещества одинаково. Оно получило название числа Авогадро. Его принято обозначать буквой N_A. По современным данным

$$N_A=6{,}022094\cdot10^{23}\ \textit{моль}^{-1}.$$

Это число — одна из важнейших универсальных постоянных современной физики и химии. Она используется при определении ряда других универсальных постоянных, например, постоянной Больцмана, постоянной Фарадея и т. п.

Число Авогадро можно определить многими независимыми друг от друга методами. Прекрасное совпадение полученных при этом значений является убедительным доказательством реальности молекул и справедливости молекулярно-кинетической теории.

В 1821 году в статье «Новые соображения о теории определенных пропорций в соединениях и об определении масс молекул тел» Авогадро подвел итог своей почти десятилетней работы в области молекулярной теории и распространил свой метод определения состава молекул на целый ряд органических веществ. В этой же статье он показал, что другие химики, прежде всего Дальтон, Дэви и Берцелиус, не знакомые с его работами, продолжают придерживаться неверных взглядов на природу многих химических соединений и характер происходящих между ними реакций.

Эта работа интересна еще в одном отношении: в ней впервые встречается имя Ампера, по выражению Авогадро, «одного из самых искусных физиков наших дней», в связи с его исследованиями в области молекулярной теории. Эту сторону деятельности Ампера обычно не упоминают, поскольку его заслуги в области электродинамики затмевают все остальные работы. Тем не менее, Ампер работал и в области молекулярной физики и независимо от Авогадро (но несколько позже) пришел к некоторым из идей, высказанных Авогадро. В 1814 году Ампер опубликовал письмо к химику Бертолле, в котором сформулировал положение, по существу совпадающее с законом Авогадро. Здесь же он указывал, что соответствующая работа Авогадро стала ему известна уже после написания письма к Бертолле.

Чтобы закончить рассказ о работах Авогадро в области молекулярной теории, отметим, что в 1837—1841 годах он издал четырехтомное сочинение «Физика весомых тел, или трактат об общей конституции тел».

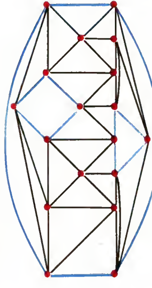
Каждый том имел более 900 страниц. К этому времени Авогадро уже исполнилось 65 лет, но ум его по-прежнему был ясным, а любовь к науке и трудолюбие неиссякаемыми. Этот труд оказался первым в истории учебником молекулярной физики.

Огромный вклад Авогадро в развитие молекулярной теории долгое время оставался практически незамеченным современниками. Более того, открытый им закон большинство ученых связывало с именем Ампера. (И даже много позже этот закон в литературе часто именовали законом Авогадро — Ампера, хотя Авогадро сформулировал его на три года раньше Ампера.) Вплоть до начала 60-х годов XIX века в химии царил произвол как в оценке молекулярных масс, так и в описании химических реакций; оставалось немало неверных представлений об атомном составе многих сложных веществ. Дело доходило даже до попыток вообще отказаться от молекулярных представлений. Лишь в 1858 году итальянский химик Канниццаро, ознакомившись с письмом Ампера к Бертолле, в котором есть ссылка на работы Авогадро, заново «открыл» эти работы и с удивлением убедился, что они вносят полную ясность в запутанную картину состояния химии того времени. В 1860 году Канниццаро подробно рассказал о работах Авогадро на Первом Международном химическом конгрессе в Карлсруэ, и его доклад произвел огромное впечатление на присутствовавших там ученых. Как сказал один из них, он почувствовал, как завеса упала с глаз, сомнения исчезли, и вместо них появилось спокойное чувство уверенности. Великий русский химик Д. И. Менделеев, также участвовавший в работе конгресса, писал позднее: «Решающим моментом в развитии моей мысли о периодическом законе я считаю 1860 год — съезд химиков в Карлсруэ, в котором я участвовал, и на этом съезде — идеи, высказанные итальянским химиком Канниццаро» (то есть, по существу, идеи Авогадро). Заслуги Авогадро как одного из основоположников молекулярной теории получили с тех пор всеобщее признание.

Плоский правильный граф степени 5 с 18 вершинами

В «Кванте» № 11 за 1975 год была опубликована статья М. Каца «О плоских правильных графах». Напомним, что плоский граф называется правильным, если из каждой его вершины выходит одинаковое число ребер; это число и называется степенью графа.

В этой статье, в частности, обсуждался вопрос о числе вершин правильного графа степени 5; было доказано, что число вершин правильного графа степени 5 может быть любым четным числом, не меньшим 12, кроме 14 и, быть может, 18 (см. с. 14, 15). Недавно в редакцию пришло письмо из Чехословакии от старшего ассистента кафедры математической информации Яна Ничача с примером правильного графа степени 5 с восемнадцатью вершинами *) (см. рис.). Найденный граф имеет 3 четырехреберника и 26 трехреберников (на рисунке ребра четырехреберников — голубого цвета).



*) Позже еще один пример прислал В. Линис из Риги.

А. Есаян

ЭВМ опровергает

Великому математику Л. Эйлеру принадлежит следующая задача:

Обойти конем все клетки шахматной доски, побывав в каждой клетке ровно по одному разу.

В 1823 году Варнсдорф в брошюре «Простейшее и наиболее общее решение задачи о ходе коня» предложил следующее правило обхода доски:

На каждом ходу ставь коня на такую клетку, из которой можно совершить наименьшее число ходов на еще не пройденные клетки. Если таких клеток несколько, разрешается выбирать любую из них.

Отметим, что правило Варнсдорфа не является алгоритмом, поскольку оно не всегда однозначно указывает следующий ход коня (см. вторую фразу правила). Например, если конь начинает свое движение с поля d4, правило Варнсдорфа позволяет ему пойти первым ходом на любое из полей b3, b5, c2, e2 (рис. 1). (Однако, если конь начинает свое движение с поля c2, то даже на первом ходу правило Варнсдорфа однозначно указывает ему, куда пойти —на поле a1!)

Варнсдорф высказал утверждение: *с какого бы поля* конь ни начинал свое движение, *любой* путь, удовлетворяющий его правилу, в конце концов приведет к полному обходу доски (т. е. к решению задачи Эйлера). До недавнего времени не было известно, справедливо ли это утверждение. Еще в 1971 году Е. Я. Гик писал в «Кванте» (№ 9, с. 53), что утверждение Варнсдорфа «на практике всегда оправдывается..., хотя оно и не подтверждено теоретически».

Для ЭВМ «Проминь-2» была составлена программа перечисления некоторого множества путей коня. Первый контрпример был построен менее чем за 1 минуту. Перебрав 6464 пути, ЭВМ получила контрпримеры

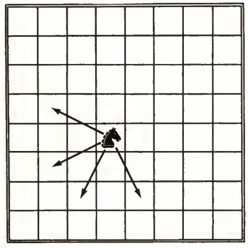


Рис. 1.

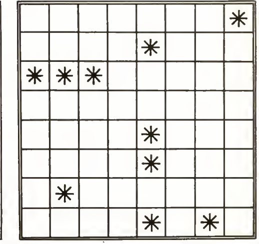
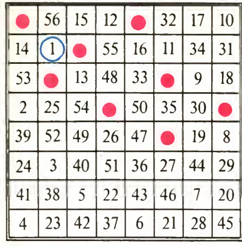


Рис. 2.



●	56	15	12	●	32	17	10
14	1	●	55	16	11	34	31
53	●	13	48	33	●	9	18
2	25	54	●	50	35	30	●
39	52	49	26	47	●	19	8
24	3	40	51	36	27	44	29
41	38	5	22	43	46	7	20
4	23	42	37	6	21	28	45

Рис. 3.

50	9	●	13	52	35	62	15
●	12	51	48	59	14	53	34
8	49	10	43	36	55	16	61
11	44	37	58	47	60	33	54
38	7	46	1	42	31	56	17
45	4	39	20	57	28	25	32
6	21	2	41	30	23	18	27
3	40	5	22	19	26	29	24

Рис. 4.

с 21 начального поля. Среди них были 10 контрпримеров с полей, отмеченных на рисунке 2 звездочками. Легко сообразить, что этих 10 контрпримеров достаточно, чтобы утверждать: *с какого бы поля* конь ни начинал свое движение, *существует* путь, удовлетворяющий правилу Варнсдорфа, который обрывается раньше полного обхода доски. На рисунках 3, 4 приведены 2 контрпримера (красными кружками отмечены поля, не пройденные конем).

В заключение поставим ряд задач:

1. Справедливо ли утверждение: *с какого бы поля* конь ни начинал свое движение, *существует* путь, удовлетворяющий правилу Варнсдорфа, приводящий к полному обходу доски?

2. Существует ли путь, удовлетворяющий правилу Варнсдорфа, при котором остается непройденным *нечетное* число полей? (В контрпримерах, построенных машиной, их было 2, 4, 6 или 8.)

3. Существует ли путь, удовлетворяющий правилу Варнсдорфа, при котором остается непройденным *больше* 8 полей?

4. Какое *наибольшее* количество полей может остаться непройденным при обходе доски по правилу Варнсдорфа?

Задачи наших читателей

1. AB — хорда окружности, C и D — точки этой окружности, лежащие по одну сторону от AB. Прямая CD пересекает прямую AB в точке M (C между M и D, A между M и B). Доказать, что

$$\frac{|AC|\cdot|AD|}{|AM|}=\frac{|BC|\cdot|BD|}{|BM|}.$$

С. Охитин (г. Оренбург)

2. Решить уравнение

$$\overline{xy}^m=\underbrace{\overline{xyyy\ldots y}}_{m+1},$$

где m — целое число.

И. Михалкевич (Минская обл.)

3. Через вершины A, B и C треугольника ABC проведены прямые, пересекающиеся в одной точке O. Обозначим $\alpha=\widehat{OAC}$, $\beta=\widehat{OBA}$, $\gamma=\widehat{OCB}$, причем каждый из этих углов будем считать положительным, если он содержит соответствующий внутренний угол треугольника или сам содержится в нем, равным нулю, если его стороны совпадают, и отрицательным в противном случае. Пусть O — одна из шести замечательных точек треугольника ABC — центр вписанной или центр описанной окружности, ортоцентр или один из трех центров вневписанных окружностей. Доказать, что тогда $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$.

В. Колбасенко (г. Суходольск)



В. Майер, Е. Мамаева

Опыты с порошковыми фигурами

Какое отношение имеет пыль — мелкий сыпучий порошок — к физике? Если вы думаете, что физик вспоминает о пыли только в те не очень приятные моменты, когда ему надо почистить свою экспериментальную установку, то глубоко заблуждаетесь. Невозможно даже перечислить все то, что дало науке и технике изучение свойств мелких порошков и их взвесей (суспензий), или указать те области, где эти свойства нашли применение. Вот несколько примеров. С помощью порошка впервые была достаточно точно измерена длина звуковой волны в воздухе; порошок и сейчас применяется при изучении звуковых колебаний различных пластинок и мембран. Взвешенный в жидкости порошок позволил установить реальность молекулярного движения (вспомните броуновское движение). Металлический порошок используется для наблюдения доменов ферромагнетиков. Ферромагнитные порошки применяются в дефектоскопии.

Разрабатываются и применяются колоссальные установки для улавливания пыли (без знания свойств пыли здесь не обойтись). Но столь же интенсивно ведутся работы по созданию распыляющих различные вещества установок.

Любые опыты с мелкими порошками интересны сами по себе. Кроме того, они поучительны еще и тем, что показывают, как много дает изучение обыденных вещей, на которые мы зачастую не обращаем внимания.

Предлагаем вам несколько простых, но очень эффектных опытов. Они не требуют никакого сложного оборудования, поэтому вы их сможете провести даже в домашних условиях.

Получение порошковых фигур

На алюминиевую пластинку равномерным тонким слоем насыпем порошок зубоврачебной пластмассы «Протакрил» (продается во всех аптеках). Пластинку проводником соединим с конденсатором (емкость конденсатора $C = 0{,}01$ *мкф*, рабочее напряжение 400 *в*). Второй конец конденсатора припаяем к проводнику со штекером. Включим штекер в одно из гнезд розетки электроосветительной сети (127 или 220 *в*). Пальцем проведем по порошку, насыпанному на алюминиевую пластинку, — на пластинке останется прерывистый след (рис. 1).

Попробуем объяснить результат опыта. Переменный электрический ток в розетки квартиры поступает по двум проводам. Один из этих проводов заземлен — потенциал его равен потенциалу земли, который обычно считают равным нулю. Человеческое тело также более или менее хорошо заземлено, так что и его потенциал можно принять равным нулю. Алюминиевая пластинка через конденсатор соединена с другим проводом сети, который называют фазовым. Конденсатор «пропускает» переменный ток. Таким образом, между проводящим по порошку пальцем и самой алюминиевой пластинкой имеется переменная разность потенциалов.

Когда палец движется по порошку, в результате трения порошок

электризуется, заряжаясь, например, положительно (быть может, он заряжается и отрицательно, но суть дела от этого не меняется, а выяснять, каков именно заряд порошка, мы не будем). Поскольку между алюминиевой пластинкой и движущимся пальцем имеется переменная разность потенциалов, порошок притягивается к пластинке, когда ее потенциал отрицательный, и прилипает к пальцу в те моменты, когда он имеет отрицательный потенциал относительно пластинки. Так получается тот прерывистый след, который вы видите на рисунке 1.

Описанную экспериментальную установку можно видоизменить. Заменим алюминиевую пластинку электропроводной бумагой. Ее приготовить нетрудно. Обычный лист бумаги (размером примерно 20×30 *см*) надо покрыть с одной стороны густоразведенной черной гуашью. После высыхания краски образуется тонкий электропроводный слой, имеющий довольно высокое сопротивление. Лист электропроводной бумаги кнопками следует прикрепить к фанере. Проводник можно соединить с электропроводной бумагой с помощью обычной канцелярской скрепки.

Вместо порошка пластмассы «Протакрил» в опытах лучше использовать сухой зубной порошок — прерывистый след получается более устойчивым. На электропроводную бумагу его можно нанести тонким равномерным слоем, применяя ватный тампон. При необходимости зубной порошок можно подсушить на электроплитке, насыпав порошок в металлическую баночку. Можно также использовать ликоподий или «серный цвет» (мелко истолченная сера). Первый порошок продается в аптеках, второй можно найти в школьном химическом кабинете.

Может оказаться, что для опытов нужна меньшая разность потенциалов, чем та, которая получается при непосредственном использовании напряжения сети. Для регулирования разности потенциалов между электропроводной бумагой и землей следует воспользоваться потенциометром (рис. 2; сопротивление потенциометра $R=470$ *ком*). С целью соблюдения правил техники безопасности цепь нужно смонтировать в корпусе из изоляционного материала (можно использовать подходящую пластмассовую баночку). Общий вид установки для опытов представлен на рисунке 3.

Для чего можно использовать порошковые фигуры?

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим два опыта. Разорвем проводник, идущий от конденсатора к электропроводной бумаге. В разрыв проводника включим диэлектрик: например, очищенные концы проводов несколько раз обмотаем вокруг стеклянной трубки так, чтобы расстояние между витками составляло 1—2 *см*. Проведем пальцем по насыпанному

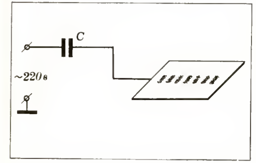


Рис 1.

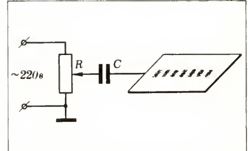


Рис. 2.

на электропроводную бумагу зубному порошку. При этом на бумаге останется, хотя и менее резкий, чем изображенный на рисунке 3, но все же отчетливый прерывистый след.

Стекло — очень хороший диэлектрик, через который электрический ток *практически* не проходит (точнее, проходит очень малый ток). Но на бумаге появился прерывистый след! Следовательно, с помощью порошковых фигур можно регистрировать чрезвычайно малые токи.

Поставим еще один опыт. В разрыв проводника, идущего от конденсатора к электропроводной бумаге, включим переключатель (тумблер), позволяющий размыкать и замыкать цепь. Проводя по порошку пальцем, включим и быстро выключим тумблер, не прекращая движения пальца. При этом на время включения тумблера след становится прерывистым. Получившиеся на траектории движения пальца светлые или темные участки мы будем называть временными метками. Время, прошедшее от момента возникновения одной метки до момента появления соседней, должно составлять 0,02 *сек* (частота переменного тока $f = 1/T = 50$ *гц*). Таким образом, сосчитав число меток на траектории движения пальца, можно определить время, в течение которого был включен тумблер.

В опыте удобно использовать делитель напряжения (см. рис. 2). Дело в том, что тела, которые мы привыкли считать непроводниками, отнюдь не диэлектрики в полном смысле этого слова. Поэтому даже когда тумблер, разрывающий фазовый провод, выключен, по цепи идет небольшой ток, и на бумаге появляются порошковые фигуры. Чтобы устранить это нежелательное явление, необходимо уменьшить разность потенциалов между электропроводной бумагой и пальцем. Подобрать оптимальную разность потенциалов и позволяет делитель напряжения (потенциометр). Заметим, что этот опыт удобнее проводить вдвоем (можно предложить своему товарищу проверить его реакцию на включение и выключение тумблера).

Итак, описанные опыты показывают, что порошковые фигуры могут быть использованы для обнаружения небольших токов и измерения малых промежутков времени.

Теперь — несколько конкретных примеров.

Ионизация воздуха пламенем

В разрыв фазового проводника сети, сделанный после конденсатора, впаяем две латунные или жестяные полоски размером примерно 10×80 *мм*. Получившиеся электроды укрепим в спичечных коробках, которые будут выполнять роль штативов. Расположим электроды параллельно друг другу так, чтобы промежуток между ними составлял 2—5 *мм* (рис. 4). Проведем пальцем по слою зубного порошка на электропроводной бумаге — след получается сплошным, без временных меток.

Внесем в промежуток между электродами пламя зажженной спички или горящей свечи и вновь проведем по бумаге пальцем. Сразу же на траектории движения пальца появляются временные метки (см. рис. 4).

В этом и аналогичных ему опытах удобно непрерывно водить пальцем по кругу; тогда нетрудно будет заметить момент появления и исчезновения временных меток. Проделанный опыт показывает, что в обычных условиях воздух является диэлектриком. Внесенное пламя ионизирует воздух, делает его проводником. Электрическая цепь замыкается, в цепи возникает электрический ток.

Измерение ускорения свободного падения

Возможность с помощью порошковых фигур измерять небольшие промежутки времени можно использовать в опыте по определению ускорения свободного падения.

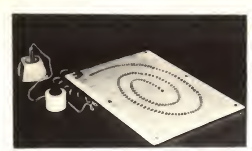


Рис. 3. Внешний вид установки для опытов с порошковыми фигурами. Установка состоит из розетки электроосветительной сети, делителя напряжения с конденсатором и листа электропроводной бумаги с порошком.



Рис. 4. Ионизация воздуха пламенем. До внесения пламени в промежуток между электродами движущийся палец оставляет на электропроводной бумаге сплошной след; сразу после внесения пламени след становится прерывистым.

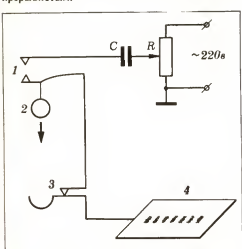


Рис. 5. Схема установки для определения ускорения свободного падения. *1* — нормально разомкнутые контакты, *2* — падающее тело, *3* — нормально замкнутые контакты, *4* — лист электропроводной бумаги с порошком.

Если поднятое над землей тело начинает падать, то, как известно из механики, путь h оно пройдет за время $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Следовательно, ускорение свободного падения может быть найдено по формуле

$$g = \frac{2h}{t^2}, \qquad (*)$$

если известны высота h, с которой падает тело, и время падения t. Высоту можно измерить линейкой, а время падения — определить методом порошковых фигур.

Схема экспериментальной установки приведена на рисунке 5. Проводник, идущий от конденсатора к листу электропроводной бумаги, разорван двумя парами контактов. Контакты *1* — нормально разомкнутые (к нижнему контакту с помощью нитки подвешено тело *2*, оттягивающее его вниз). Контакты *3* — нормально замкнутые. В исходном состоянии цепь разомкнута. Когда тело начинает падать, контакты *1* соединяются, и цепь становится замкнутой на промежуток времени, в течение которого тело падает. При этом на траектории движения пальца (на электропроводной бумаге *4*) образуются временны́е метки. Как только тело попадает на нижний контакт *3*, цепь вновь размыкается, и появление меток прекращается.

Внешний вид установки изображен на рисунке 6, *а*. Верхняя пара контактов (рис. 6, *б*) изготовлена из прикрепленных изоляционной лентой к карандашу упругих латунных полосок (можно использовать контактную пару от подходящего реле). Нижняя пара контактов устроена еще проще: на карандаше закреплена латунная полоска, на которой свободно лежит вторая полоска, припаянная к мягкому проводнику (рис. 6, *в*). Когда падающее тело ударяется о первую полоску, вторая полоска падает, и цепь размыкается.

Опыт проводится в следующем порядке. Ниткой привязывают тело



а)



б)



в)

Рис. 6. Экспериментальная установка для определения ускорения свободного падения. В качестве падающего тела использована массивная шайба. а) — общий вид установки. б) и в) — устройство верхней и нижней контактных пар.

к нижнему контакту верхней пары. Линейкой измеряют расстояние между телом и нижней контактной парой. Начинают вести пальцем по зубному порошку на электропроводной бумаге, и затем, не прекращая движения пальца, спичкой пережигают нить. На траектории движения пальца образуется область с отчетливыми временными метками. Сосчитав число полученных меток, определяют время падения тела, и по формуле (*) рассчитывают ускорение свободного падения.

В нашем опыте путь, проходимый телом при падении, составлял 27 *см*. Число меток оказалось равным 12. Следовательно, тело падало 0,24 *сек*. Исходя из этих данных, ускорение свободного падения $g \approx 9{,}4$ *м/сек*^{2}. Учитывая простоту эксперимента, этот результат следует признать достаточно хорошим. Точность измерения ускорения свободного падения можно значительно повысить, если увеличить высоту, с которой падает тело.

Для успешной постановки опыта необходимо с помощью делителя напряжения подобрать такую разность потенциалов, чтобы при разомкнутой цепи метки не появлялись (напомним, что плохая изоляция приводит к фактическому замыканию цепи, и метки образуются даже тогда, когда контакты разомкнуты). Штатив в экспериментальной установке использовать совсем не обязательно: в домашних условиях карандаши с контактами можно привязать к деревянной рейке или к спинке и ножке стула.

Упражнения

1. Проведя пальцем по зубному порошку на электропроводной бумаге, получите прерывистый след. Теперь прикоснитесь пальцем другой руки к электропроводной бумаге и вновь повторите опыт. Почему в последнем случае на траектории движения пальца не остаются временные метки?

2. Объясните, почему порошковые фигуры могут быть использованы для регистрации малых токов?

3. Поставьте опыт, демонстрирующий фотоэффект.

Таинственный остров



Вы узнали, конечно, иллюстрацию к роману Жюля Верна «Таинственный остров»? Колышки в песок втыкает в конец тени от шеста всезнающий и все умеющий инженер Сайрус Смит. С часами стоит журналист Гедеон Спилет... А вот подробность, которую вы могли и забыть: остров, где происходили описываемые в романе события, находился южнее 30° южной широты.

Гравер Ж. Барбан и художник П. Фера, иллюстрировавшие романы Ж. Верна, как правило, прекрасно справлялись со своей задачей.

Но в данном случае...

Попробуйте ответить на следующие вопросы:

1. Верно ли изображены тени на иллюстрации?

2. В какую сторону должна быть выпукла кривая, которую можно провести через основания колышков — от шеста или к шесту?

3. Верно ли, что колышки втыкались слева направо?

Попробуйте нарисовать кривую, которую описывает конец тени от шеста в течение дня на разных широтах. Шест направлен параллельно оси вращения Земли.

В. Тихонов

Задачи-близнецы

Шахматистам знакомы так называемые «задачи-близнецы», условия которых имеют небольшое различие, а решения совершенно разные. Вот забавный пример двух математических задач-близнецов.

Между *А* и *В* произошел следующий диалог.

А: У вас есть дети?

В (1): Да, есть.

В (2): Да, трое.

А: Какого возраста?

В: Произведение их возрастов равно 36, а сумма — числу окон вон в том доме.



А (подумав): Я не могу определить их возраст.

В: Добавлю: старший — мальчик.

А: Теперь все ясно.

Требуется определить количество и возраст детей при двух вариантах ответа на первый вопрос ((1) и (2)). Самое удивительное заключается в том, что хотя ответы разные, но в том и другом случае детей трое.

В. Шарафутдинов
(г. Новосибирск)

задачник Кванта

Задачи

М396—М400; Ф408—Ф412

Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 ноября 1976 г. по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», №396» или «...Ф408». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В этом номере «Задачник «Кванта» составлен в основном из задач, предлагавшихся на последней Всесоюзной олимпиаде. В скобках (после задач заключительного тура олимпиады) указан класс, для учеников которого предлагалась задача.

Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

М396. Треугольник, все стороны которого больше 1 *см*, назовем «большим». Дан правильный треугольник ABC со стороной 5 *см*. Докажите, что а) из треугольника ABC можно вырезать 1000 «больших» треугольников; б) треугольник ABC можно разрезать на 1000 «больших» треугольников; в)* треугольник ABC можно триангулировать на 1000 «больших» треугольников, то есть разбить его так, чтобы любые два треугольника либо не имели общих точек, либо имели только общую вершину, либо имели общую сторону; г) сделайте пункты б) и в) для правильного треугольника со стороной 3 *см*. (8—9 кл.)

С. Фомин

М397. На плоскости даны три окружности одинакового радиуса.

а) Докажите, что если все они пересекаются в одной точке, как показано на рисунке 1, то сумма отмеченных дуг AK, CK, EK равна 180°.

б) Докажите, что если они расположены так, как показано на рисунке 2, то сумма отмеченных дуг AB, CD, EF равна 180°. (8 кл.)

М398. На окружности расположены n действительных чисел ($n \geqslant 3$), сумма которых равна нулю. Одно из этих чисел равно 1.

а) Докажите, что есть два соседних числа, различающихся не менее чем на $4/n$.

б) Докажите, что есть число, отличающееся от среднего арифметического двух своих соседей не менее чем на $8/n^2$.

в) Оценку, предложенную в предыдущем пункте, можно улучшить. Попробуйте заменить в ней число 8 каким-нибудь большим числом так, чтобы утверждение этой задачи по-прежнему выполнялось для всех натуральных чисел.

г)* Докажите, что для $n=30$ на окружности есть число, отличающееся от среднего арифметического двух своих соседей не менее чем на 2/113. Приведите пример набора 30 чисел на окружности,

в котором ни одно число не отличается от среднего арифметического двух своих соседей более чем на 2/113.

д)* Найдите в этой задаче точную оценку разности между числом и средним арифметическим его соседей для любого n. (9 кл.)

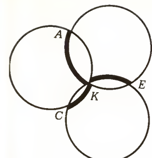


Рис. 1.

М399*. На отрезке длины 7 можно поставить пять точек (см. рис. 3) так, чтобы для любого $m=1, 2, \ldots, 7$ нашлись две из этих пяти точек на расстоянии m.

Попробуйте выяснить, какое наименьшее число k_n точек нужно поставить на отрезке длины n так, чтобы для любого $m=1, 2, \ldots, n$ нашлись две из этих k_n точек на расстоянии m.

а) Решите эту задачу для нескольких первых значений n (нам известно k_n для $n \leqslant 13$).

б) Получите оценки для k_n для любого n. Известны оценки $(\sqrt{8n+1}+1)/2 \leqslant k_n \leqslant \sqrt{4n+5}-1$. Постарайтесь доказать эти неравенства и, если сможете, найдите более точные оценки.

А. Савин

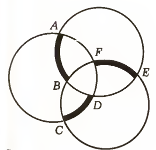


Рис. 2.

М400. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ назовем универсальной для данного N, если из нее можно получить вычеркиванием части членов любую последовательность из N чисел, в которую каждое из чисел 1, 2, ..., N входит по одному разу.

а) Приведите пример универсальной последовательности из N^2 членов.

б) Приведите пример универсальной последовательности из N^2-N+1 членов.

в) Докажите, что любая универсальная последовательность состоит не менее чем из $\frac{N(N+1)}{2}$ членов.

г) Докажите, что при $N=4$ самая короткая универсальная последовательность состоит из 12 членов.

д) Попробуйте найти для данного N как можно более короткую универсальную последовательность. (9 кл.)

Г. Гуревич



Рис. 3.

Ф408. Из сопротивлений в 1, 2, 3 и 4 *ом* собрана схема, показанная на рисунке 4. Какой ток течет через амперметр A_2, если ток через амперметр A_1 5 *а*? Показания вольтметра 10 *в*. Измерительные приборы идеальные. (8 кл.)

Ф409. Почему с помощью линзы можно зажечь бумагу светом от Солнца, но нельзя светом от звезды? (10 кл.)

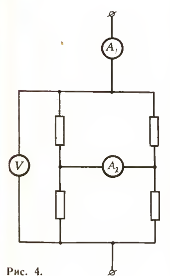


Рис. 4.

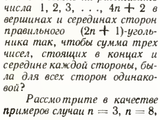
Ф410. В электровакуумном приборе чистый вольфрамовый катод находится в большой колбе, содержащей остатки кислорода при давлении $p = 10^{-7}$ *атм* и температуре $T = 300\,^{\circ}$ К. Считая, что каждая молекула, попавшая на катод, прилипает к нему, оценить время образования мономолекулярного слоя. Молекулы можно считать шариками диаметром $d \approx 3 \cdot 10^{-8}$ *см*. (9 кл.)

Ф411. Одним U-образным ртутным манометром можно измерять давления до 1 *атм*. Какое наибольшее давление можно измерить, если соединить последовательно два таких манометра короткой трубкой? (9—10 кл.)

Ф412. Учитель, отвернувшись к доске, следит за классом по отражениям в стеклах очков. При этом он видит два отражения ученика, сидящего от него в 5 *м*: одно на расстоянии 5 *м*, другое — на расстоянии $\frac{5}{7}$ *м*. Повернувшись лицом к классу, он через очки видит изображение того же ученика на расстоянии 2,5 *м*. Определить показатель преломления стекла, из которого изготовлены линзы очков. (10 кл.)

Решения задач

М354 — М358, М360; Ф362 — Ф368



М354. *Можно ли расставить числа 1, 2, 3, ..., $4n+2$ в вершинах и серединах сторон правильного $(2n+1)$-угольника так, чтобы сумма трех чисел, стоящих в концах и середине каждой стороны, была для всех сторон одинаковой?*

Рассмотрите в качестве примеров случаи $n = 3$, $n = 8$.

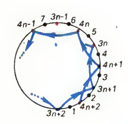


Рис. 1.

Ответ. Можно.

Приведем один из способов расстановки. В серединах сторон многоугольника поставим по порядку числа от 1 до $2n+1$. Расставить оставшиеся числа $2n+2, \ldots, 4n+2$ помогает такое соображение. Найдем сумму S трех чисел, стоящих в конце и середине каждой стороны. Очевидно, $S = \frac{\Sigma + \Sigma'}{2n+1}$, где $\Sigma = 1 + 2 + \ldots + (4n+2) = (2n+1) \times (4n+3)$ — сумма всех выписанных чисел, $\Sigma' = (2n+2) + \ldots + (4n+2) = (2n+1)(3n+2)$ — сумма чисел, которые нужно расставить в вершинах; поэтому $S = 7n+5$. Поставим теперь в вершине, общей для сторон с числами 1 и 2 посередине, число $4n+2$, а числа $4n+1$, $4n, \ldots, 2n+2$ будем ставить в вершинах *через одну*, считая вершину с числом $4n+2$ начальной — см. рисунок 1 (на этом рисунке все точки расположены на одной окружности; черные точки — это «середины», красные — «вершины»). Покажем, что таким образом в каждую вершину будет поставлено нужное число (то, что это будут именно числа $2n+2, \ldots, 4n+2$, сомнений не вызывает). В самом деле, через n шагов мы первый раз попадем в вершину, соседнюю с начальной, причем в эту вершину будет поставлено число $(4n+2) - n = 3n+2$, так что сумма чисел на стороне с единицей посередине окажется равной как раз $(3n+2) + 1 + (4n+2) = 7n+5$. Теперь уже очевидно, что дальше эта сумма не

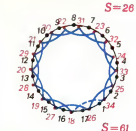


Рис. 2.

меняется: в оставшийся «свободным» конец каждой стороны мы ставим число на единицу меньше числа, поставленного на другом конце смежной с ней стороны; зато в середине этой стороны стоит число на единицу больше, чем то, которое стоит в середине смежной стороны.

Как расставлять числа при $n = 8$, видно из рисунка 2.

С. Берколайко

М355. *N ребят перекидываются N мячами. В начале игры каждый из них бросает свой мяч кому-нибудь из своих товарищей и сам ловит брошенный кем-нибудь мяч (он может подбросить и поймать свой собственный мяч) так, что снова у всех оказывается по мячу. Затем ребята опять бросают мячи тем же, кому они бросали их в первый раз и так далее. Игра останавливается, когда все мячи вернулись к своим владельцам (чтобы мячи не перепутались, будем считать их разноцветными).*

Докажите, что

а) к каждому из участников мяч вернется впервые не более чем через N бросаний;

б) игра обязательно закончится;

в) для 5, 10 и 15 участников она может закончиться самое большее через соответственно 6, 30 и 105 бросаний (а какова максимальная возможная длительность игры для $N=7$, $N=8$, $N=20$?);

г) длительность игры всегда является делителем числа $N!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot N$;

д) длительность игры не может превышать $3^{\frac{N}{3}}$.

◆

Пусть игрок A_1 передал свой мяч игроку A_2, игрок A_2 — игроку A_3 и т. д. Поскольку игроков — конечное число, в этой последовательности рано или поздно один из игроков встретится дважды. Ясно, что первым таким игроком будет игрок A_1. Действительно, пусть игрок A_n передает свой мяч игроку A_k, где $k < n$ и $k > 1$. Тогда игроки A_n и A_{k-1} передают мячи одному и тому же игроку, и из условия задачи следует, что игроки A_{k-1} и A_n — это одно и то же лицо. Поэтому игроков $A_1, A_2, \ldots$ можно расставить по кругу так, чтобы каждый игрок передавал и получал мячи от своих соседей. Всех же игроков можно расставить в несколько таких кругов. Поскольку в каждом из таких кругов стоит не более N человек, мяч к любому из игроков вернется не более чем через N бросаний.

Пусть всего у нас получилось s кругов, в которых стоят $l_1, l_2, \ldots, l_s$ человек соответственно. Если в круге стоят l человек, то после $m\cdot l$ бросаний все мячи в нем окажутся у владельцев. Поэтому игра закончится после $T =$ Н. О. К. $(l_1, l_2, \ldots, l_s)$ бросаний. (Н. О. К. $(l_1, \ldots, l_s)$ — это наименьшее общее кратное чисел $l_1, \ldots, l_s$). Поскольку все $l_i \leqslant N$, ясно, что T — делитель $N!$. Таким образом, мы ответили на пункты а), б) и г) задачи. Разберем пункт д).

Заметим, что $l_1 + l_2 + \ldots + l_s = N$, и все l_i — целые числа. Покажем, что $l_1\cdot l_2\cdot \ldots \cdot l_s \leqslant 3^{\frac{N}{3}}$. (В условии задачи, опубликованном в «Кванте» № 11 за 1975 год, в пункте д) была допущена опечатка: длительность игры не может превышать $3^{\frac{N}{3}}$, а не $3N/3$.) Действительно, если некоторое $l_s \geqslant 4$, то, заменив его на $2 + (l - 2)$, мы не изменим сумму $l_1 + l_2 + \ldots + l_s$ и не уменьшим произведения $l_1\cdot l_2\cdot \ldots \cdot l_s$. Поэтому от произведения $l_1\cdot l_2\cdot \ldots \cdot l_s$ можно перейти к не меньшему, в котором уже все сомножители не больше трех. Заменяя, если это окажется возможным, $1 + 1$ на 2, $1 + 3$ на $2 + 2$ и $2 + 2 + 2$ на $3 + 3$, мы получим произведение вида $3\cdot 3\cdot \ldots \cdot 3$, $3\cdot 3 \ldots 3\cdot 2$ или $3\cdot 3\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 2$ в зависимости от остатка, получающегося при делении N на 3, которое не меньше любого произведения $l_1\cdot l_2\cdot \ldots \cdot l_s$. А именно: если N нацело делится на 3, то возьмем $\frac{N}{3}$ троек, и получим нужную оценку; если в остатке получится 1, то возьмем $\left[\frac{N}{3}\right] - 1$ троек и две двойки; тогда $l_1\cdot l_2\cdot \ldots \cdot l_s < 2\cdot 2\cdot 3^{\left[\frac{N}{3}\right]-1} = 4\cdot 3^{\frac{N-4}{3}}$; но $4\cdot 3^{\frac{N-4}{3}} < 3^{\frac{N}{3}}$, поскольку $4^3 > 3^4$. Если же в остатке получится 2, то возьмем $\left[\frac{N}{3}\right]$ троек и одну двойку;

тогда $l_1 \cdot l_2 \cdot \ldots \cdot l_s < 2 \cdot 3^{\left[\frac{N}{3}\right]} = 2 \cdot 3^{\frac{N-2}{3}}$ и $2 \cdot 3^{\frac{N-2}{3}} < 3^{\frac{N}{3}}$, так как $2^3 < 3^2$. Тем самым нужиая оценка получеиа.

Перейдем к пуикту в). Заметим, что для того, чтобы длительиость игры $T =$ Н.О.К. $(l_1, l_2, \ldots, l_s)$ была максимальиой, нужно разбивать число N иа s слагаемых $l_1, \ldots, l_s$ так, чтобы они были попарио взаимно просты (если есть слагаемые $p_1 q_1$ и $p_1 q_2$, где p_1, q_1 и q_2 попарио взаимно просты, то можно перейти к слагаемым p_1, q_1, q_2, $[p_1(q_1+q_2) - p_1 - q_1 - q_2]$) и чтобы каждое из $l_1, \ldots, l_s$ было либо простым числом, либо степенью простого (убедитесь в этом самостоятельно). Непосредствениой проверкой получаем, что наилучшее разбиение для 5 — это $2+3$; тогда $2 \cdot 3 = 6$; для 10 — это $2+3+5$, и $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$; для 15 — это $3+5+7$, и $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

Наконец, если $N = 7$, то максимально возможиая длительиость игры получится, если взять $7 = 4+3$, — тогда $T_{max} = 4 \cdot 3 = 12$; если $N = 8$, — то $8 = 3+5$ и $T_{max} = 15$; если $N = 20$, — то $20 = 4+5+11$, и $T_{max} = 220$.

Л. Лиманов

◆

М356. *Из точки M, взятой внутри треугольника $A_1B_1C_1$, опущены перпендикуляры MA_2, MB_2, MC_2 на прямые B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 соответственно, затем из той же точки M опущены перпендикуляры MA_3, MB_3, MC_3 на прямые B_2C_2, A_2C_2, A_2B_2 и так далее. Докажите, что в полученной последовательности треугольников $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, ... треугольник $A_{3n+1}B_{3n+1}C_{3n+1}$ подобен треугольнику $A_1B_1C_1$.*

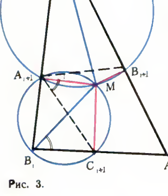


Рис. 3.

Докажем прежде всего такое вспомогательиое соотиошеиие: $\widehat{A}_{i+1} = B_i\widehat{M}C_i - \widehat{A}_i$ (соответствеиио $\widehat{B}_{i+1} = A_i\widehat{M}C_i - \widehat{B}_i$, $\widehat{C}_{i+1} = A_i\widehat{M}B_i - \widehat{C}_i$).

Действительио, поскольку $MA_{i+1} \perp B_iC_i$, $MB_{i+1} \perp A_iC_i$ и $MC_{i+1} \perp A_iB_i$, вокруг четырехугольииков $MA_{i+1}C_iB_{i+1}$ и $MA_{i+1}B_iC_{i+1}$ можио описать окружиости с диаметрами MC_i и MB_i соответствеиио. Поэтому $MA_{i+1}\widehat{\ }B_{i+1} = MC_i\widehat{\ }B_{i+1}$ и $MA_{i+1}\widehat{\ }C_{i+1} = MB_i\widehat{\ }C_{i+1}$ (как вписаиные углы, опирающиеся иа одни и те же дуги), и для угла A_{i+1} имеем (см. рис. 3):

$$\widehat{A}_{i+1} = C_{i+1}\widehat{A}_{i+1}B_{i+1} = MA_{i+1}\widehat{\ }B_{i+1} + MA_{i+1}\widehat{\ }C_{i+1} =$$
$$= MC_i\widehat{\ }B_{i+1} + MB_i\widehat{\ }C_{i+1} = (\widehat{C}_i - M\widehat{C}_iB_i) + (\widehat{B}_i - M\widehat{B}_iC_i) =$$
$$= (\widehat{B}_i + \widehat{C}_i) - (M\widehat{B}_iC_i + M\widehat{C}_iB_i) =$$
$$= (180^\circ - \widehat{A}_i) - (180^\circ - B_i\widehat{M}C_i) = B_i\widehat{M}C_i - \widehat{A}_i.$$

Посчитаем теперь углы треугольиика $A_4B_4C_4$. Имеем:

$$\widehat{A}_4 = B_3\widehat{M}C_3 - \widehat{A}_3 = (180^\circ - \widehat{A}_2) - (B_2\widehat{M}C_2 - \widehat{A}_2) =$$
$$= (180^\circ - B_2\widehat{M}C_2) = \widehat{A}_1.$$

Аналогично $\widehat{B}_4 = \widehat{B}_1$, $\widehat{C}_4 = \widehat{C}_1$; то есть $\triangle A_4B_4C_4 \backsim \triangle A_1B_1C_1$. Приняв треугольник $A_4B_4C_4$ за исходный ($\triangle A_1'B_1'C_1'$), точно так же докажем, что

$$\triangle A_7B_7C_7 \backsim \triangle A_4B_4C_4 \backsim \triangle A_1B_1C_1,$$

затем, что

$$\triangle A_{10}B_{10}C_{10} \backsim \triangle A_7B_7C_7 \backsim \ldots \backsim \triangle A_1B_1C_1,$$

и так далее, так что

$$\triangle A_{3n+1}B_{3n+1}C_{3n+1} \backsim \triangle A_{3n-2}B_{3n-2}C_{3n-2} \backsim \ldots \backsim \triangle A_1B_1C_1,$$

что и требовалось доказать.

Я. Суконник

М357. *Докажите, что если* $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$, *то* $x=y=z$ *или* $x^2y^2z^2=1$.

Из условий задачи следует, что

$$x-y=\frac{y-z}{yz},\quad y-z=\frac{z-x}{xz}\ \text{и}\ z-x=\frac{x-y}{xy}.$$

Из первых двух соотношений $x-y=\frac{z-x}{xyz^2}$; подставляя вместо разности $z-x$ ее выражение через x и y (последнее соотношение), получим, что $x-y=\frac{x-y}{x^2y^2z^2}$. Отсюда либо $x=y$ и тогда $z-x=0$, $y-z=0$, то есть $x=y=z$, — либо же $1=\frac{1}{x^2y^2z^2}$, то есть $x^2y^2z^2=1$.

И. Клумова



М358. *Докажите, что у любого n-угольника* ($n\geqslant 4$) *есть хотя бы одна диагональ целиком лежащая внутри n-угольника, и выясните, какое наименьшее число таких диагоналей может иметь n-угольник (при каждом n).*

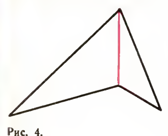


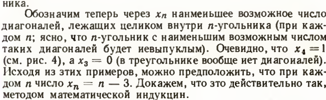
Рис. 4.

Прежде всего заметим, что все диагонали выпуклого n-угольника лежат внутри него, причем число этих диагоналей равно $\frac{n(n-3)}{2}$. Не менее очевидно, что для каждого данного n число $\frac{n(n-3)}{2}$ лежащих внутри диагоналей не является минимальным: на рисунке 4 изображен четырехугольник, внутри которого лежит всего одна диагональ, в то время как у любого выпуклого четырехугольника внутри расположены обе диагонали.

Докажем, что у невыпуклых n-угольников ($n\geqslant 4$) хотя бы одна диагональ целиком лежит внутри.

Рассмотрим угол ABC нашего невыпуклого n-угольника, превосходящий 180°. Лучи BA и BC, образующие этот угол, делят всю плоскость на две части: голубую часть I и белую часть II (см. рис. 5).

Возьмем теперь вершину n-угольника — обозначим ее буквой D, — лежащую в части II (такая вершина есть, поскольку $\widehat{ABC}>180°$); и проведем диагональ BD. Если диагональ BD пересекает какую-либо сторону нашего n-угольника, то эта сторона не лежит целиком в части I; следовательно, по крайней мере один из ее концов — обозначим его буквой E — лежит в части II. Если и диагональ BE пересекает какую-то сторону n-угольника, то, рассуждая аналогично, получаем, что один из концов этой стороны лежит в части II, и можно провести диагональ BF. Продолжим этот процесс. Поскольку ни одна из вершин не может встретиться в нашей последовательности дважды (проверьте это) и всего их конечное число, рано или поздно мы получим диагональ, целиком лежащую внутри многоугольника.



Обозначим теперь через x_n наименьшее возможное число диагоналей, лежащих целиком внутри n-угольника (при каждом n; ясно, что n-угольник с наименьшим возможным числом таких диагоналей будет невыпуклым). Очевидно, что $x_4=1$ (см. рис. 4), а $x_3=0$ (в треугольнике вообще нет диагоналей). Исходя из этих примеров, можно предположить, что при каждом n число $x_n=n-3$. Докажем, что это действительно так, методом математической индукции.

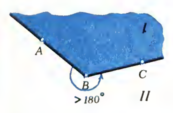


Рис. 5

База индукции. $n=4$, $x_n=1=4-3$.

Шаг индукции. Допустим, что для всех $n\leqslant k$ утверждение верно: $x_5=5-3$, ..., $x_k=k-3$. Докажем, что $x_{k+1}=(k+1)-3$.

Возьмем невыпуклый $(k+1)$-угольник с наименьшим возможным среди всех $(k+1)$-угольников числом целиком лежащих внутри диагоналей и рассмотрим ту его вершину

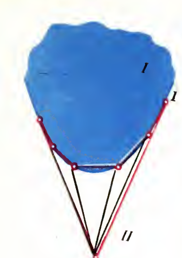


Рис. 6.

B, угол при которой превосходит 180°. Выше мы доказали, что из такой вершины исходит диагональ BQ, целиком лежащая внутри этого $(k+1)$-угольника. Диагональю BQ наш $(k+1)$-угольник разбивается на два многоугольника с меньшим числом сторон: $m \geqslant 3$ и $[(k+1)-m+2] = k-m+3$, каждый из которых имеет наименьшее возможное число целиком лежащих внутри диагоналей среди (m)- и $(k-m+3)$-угольников соответственно. По предположению индукции для первого многоугольника $x_m = m-3$, для второго $x_{k-m+3} = k-m$. Число же диагоналей, лежащих целиком внутри нашего $(k+1)$-угольника, не меньше, чем сумма числа таких диагоналей в (m)- и $(k-m+3)$-угольниках, плюс единица (сама диагональ BQ); то есть

$$x_{k+1} \geqslant (m-3)+(k-m+1) = (k+1)-3.$$

Итак, пока доказано, что для $n > k$ число $x_n \geqslant n-3$. Осталось для каждого данного n привести пример n-угольника, у которого внутри было бы р о в н о $n-3$ диагонали. Возьмем любую *выпуклую* кривую Γ — как на рисунке 6 (например, параболу), и возьмем на Γ $n-1$ точку. Кривая Γ делит всю плоскость на две области: I и II. Возьмем в области II еще одну точку и соединим ее с каждой из $(n-1)$ точек, расположенных на Γ. Мы получим нужный n-угольник: легко видеть, что внутри у него ровно $n-3$ диагонали.

И. Клумова, Л. Лиманов

◆

М360*). *Про последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ известно, что $|a_1|=1$ и $|a_{k+1}|=|a_k+1|$ при каждом $k=1,2,\ldots$ Найдите наименьшее возможное значение суммы $|a_1+a_2+\ldots+a_k|$, если*

а) $n=1975$;
б) $n=1976$.

О т в е т. Наименьшее возможное значение суммы $|a_1+a_2+\ldots+a_n|\left(\min\limits_{\{a_i\}}|a_1+a_2+\ldots+a_n|\right)$ при $n=1975$ равно 20; при $n=1976$, равно 24.

Р е ш е н и е. Для последовательности $\{a_i\}$ из условия задачи имеем:

$$\begin{cases} a_1^2 = 1, \\ a_2^2 = a_1^2 + 2a_1 + 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2a_n + 1. \end{cases}$$

Сложив эти равенства, получим:

$$a_{n+1}^2 = n+1+2\sum_{i=1}^{n} a_i,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_{n+1}^2-(n+1)}{2}$$

(это целое число, поскольку четность числа a_k совпадает с четностью k). Итак,

$$|a_1+\ldots+a_{1975}| = \left|\frac{a_{1976}^2-1976}{2}\right|,$$

$$|a_1+\ldots+a_{1976}| = \left|\frac{a_{1977}^2-1977}{2}\right|$$

Заметим, теперь, что любое целое число x, $|x| \leqslant n$, четность которого совпадает с четностью числа n, может быть реализовано как a_n для некоторой последовательности $\{a_i\}$ (докажите это самостоятельно!). Далее, $44^2 < 1976 < 45^2$, и $44^2 < 1977 < 45^2$, так что ближайший к 1976 квадрат

*) Задача М359 — это задача 12 из статьи А. З е м л я к о в а «Математика бильярда», опубликованной в «Кванте» № 5 за 1976 год. Ее решение см. в «Кванте», 1976 № 6, с. 77.

четного числа — это $1936 = 44^2$, а ближайший к 1977 квадрат нечетного числа — это $2025 = 45^2$. Поэтому сумма $|a_1 + a_2 + \ldots + a_{1976}|$ принимает наименьшее возможное значение $\left|\frac{1936 - 1976}{2}\right| = 20$ (это значение достигается для таких последовательностей $\{a_i\}$, у которых $|a_{1976}| = 44$), а сумма $|a_1 + a_2 + \ldots + a_{1976}|$ принимает наименьшее возможное значение $\left|\frac{2025 - 1977}{2}\right| = 24$ (для таких последовательностей $\{a_i\}$, у которых $|a_{1977}| = 45$).

В. Голубятников

◆

Ф362. *Слоистый конденсатор состоит из трех металлических параллельных пластин площадью S. Пространства между пластинами заполнены диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 и удельными сопротивлениями ρ_1 и ρ_2. Толщины слоев диэлектриков d_1 и d_2. Конденсатор находится под постоянным напряжением U. Определить заряд средней пластины при установившемся токе в цепи.*

Указанный слоистый конденсатор представляет собой комбинацию двух конденсаторов. Обозначим напряженности электрических полей в них через E_1 и E_2 поверхностные плотности зарядов на их обкладках — σ_1 и σ_2 и напряжения на конденсаторах — через U_1 и U_2, соответственно.

Заряды на обеих сторонах средней пластины имеют разные знаки, поэтому общий заряд средней пластины равен

$$q = (\sigma_2 - \sigma_1)\,S.$$

При стационарном распределении зарядов можно пользоваться формулами электростатики. Тогда

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0\varepsilon_1}, \qquad E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0\varepsilon_2},$$

$$U_1 = E_1 d_1, \quad U_2 = E_2 d_2, \quad U_1 + U_2 = U.$$

С другой стороны, по отношению к электрическому току конденсаторы можно рассматривать как проводники с соответствующими сопротивлениями $R_1 = \rho_1 d_1/S$ и $R_2 = \rho_2 d_2/S$. По закону Ома

$$U_1 = I\,\frac{\rho_1 d_1}{S} \quad \text{и} \quad U_2 = I\,\frac{\rho_2 d_2}{S}.$$

Решив полученную систему восьми уравнений, найдем

$$q = \frac{\varepsilon_2\rho_2 - \varepsilon_1\rho_1}{d_2\rho_2 + d_1\rho_1}\,\varepsilon_0 U S.$$

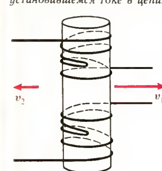


Рис. 7.

◆

Ф363. *На цилиндр намотаны нити, как показано на рисунке 7. Правые концы нитей тянут со скоростью v_1, левые — со скоростью v_2. С какой угловой скоростью вращается при этом цилиндр вокруг своей оси? Радиус цилиндра равен R.*

На рисунке 7 изображен способ намотки нитей на цилиндр, при котором возможно вращение цилиндра вокруг своей оси. Обозначим через ω угловую скорость этого вращения. В свою очередь ось цилиндра перемещается равномерно параллельно самой себе. Обозначим ее скорость через v.

Скорости точек *1* и *2* поверхности цилиндра можно представить как алгебраическую сумму линейной скорости ωR и скорости v поступательного перемещения цилиндра (рис. 8):

$$v_1 = v + \omega R, v_2 = v - \omega R.$$

Отсюда

$$\omega = \frac{|v_1 - v_2|}{2R}$$

(заметим, что v_1 и v_2 имеют разные знаки).



Рис. 8.

Ф364. *Каким должен быть коэффициент трения k резины о внешнюю поверхность конуса с углом при вершине 2α, чтобы мотоциклист мог двигаться по поверхности конуса по горизонтальной окружности радиуса R со скоростью v (рис. 9)?*

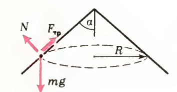


Рис. 9.

Будем считать мотоциклиста материальной точкой, исключив тем самым все проблемы, связанные с его устойчивостью по отношению к опрокидыванию. Силы, действующие на мотоциклиста, изображены на рисунке 9. Это — сила тяжести $m\mathbf{g}$, сила реакции $\mathbf{N}$ и сила трения $\mathbf{F}_{\text{тр}}$.

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$F_{\text{тр}} \sin\alpha - N\cos\alpha = m\frac{v^2}{R},$$

$$F_{\text{тр}} \cos\alpha + N\sin\alpha - mg = 0.$$

Сила сухого трения резины о внешнюю поверхность конуса

$$F_{\text{тр}} \leqslant kN.$$

Решая полученную систему, найдем

$$k \geqslant \frac{gR + v^2 \operatorname{tg}\alpha}{gR \operatorname{tg}\alpha - v^2},$$

если $v < \sqrt{gR\operatorname{tg}\alpha}$. Иначе мотоциклист по окружности радиуса R двигаться не сможет.

Б. Буховцев

◆

Ф365. *Найти емкость системы конденсаторов, соединенных так, как показано на рисунке 10.*

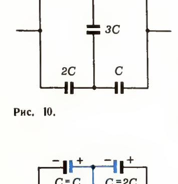


Рис. 10.

Обозначим через U_i и $q_i = C_iU_i$ напряжение и заряд на конденсаторе емкостью C_i (рис. 11). Если данную систему конденсаторов подключить к батарее с электродвижущей силой $\mathscr{E}$, то общая емкость системы

$$C_{\text{общ}} = \frac{q_1 + q_2}{\mathscr{E}} = \frac{C_1U_1 + C_2U_2}{\mathscr{E}}. \qquad (*)$$

Запишем очевидные соотношения (см. рис. 11):

$$U_1 + U_2 = \mathscr{E}, \qquad (1)$$

$$U_4 + U_5 = \mathscr{E}, \qquad (2)$$

$$U_1 + U_3 + U_5 = \mathscr{E}. \qquad (3)$$

С учетом предполагаемой полярности заряда на конденсаторе емкости C_3 закон сохранения заряда, записанный для выделенных участков цепи (см. рис. 11), дает

$$q_1 - q_2 - q_3 = 0, \quad q_3 + q_4 - q_5 = 0.$$

Эти уравнения после подстановки соответствующих значений емкости приводятся к виду

$$U_1 - 2U_2 - 3U_3 = 0, \qquad (4)$$

$$3U_3 + 2U_4 - U_5 = 0. \qquad (5)$$

Решая систему уравнений (1) — (5), можно найти напряжения U_1 и U_2:

$$U_1 = \frac{5}{9}\mathscr{E}, \quad U_2 = \frac{4}{9}\mathscr{E}.$$

Тогда окончательно согласно выражению (*) имеем

$$C_{\text{общ}} = \frac{C_1U_1 + C_2U_2}{\mathscr{E}} = \frac{13}{9}C.$$

В. Белонучкин



Рис. 11

Ф366. *Колба-шар емкостью $V=1$ л была откачана и закрыта. На стенках колбы остался мономолекулярный слой воздуха. Оценить давление, которое будет в колбе, нагретой до 300°С, если известно, что при такой температуре стенки колбы полностью обезгаживаются.*

Число молекул, оставшихся на стенках колбы, равно примерно $N \sim \frac{4\pi R^2}{d^2}$, где $R \approx 0{,}06$ *м* — радиус колбы, $d \sim 10^{-10}$*м* — диаметр молекулы газа. После обезгаживания стенок концентрация молекул в колбе будет равна

$$n = \frac{N}{V} \sim \frac{3}{d^2R},$$

и искомое давление

$$p = nkT \sim \frac{3kT}{d^2R} \approx 40 \ н/м^2.$$

Здесь $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ *дж/град* — постоянная Больцмана, $T \approx 600$ °К.

Сравним полученное давление с нормальным атмосферным давлением $p_0 \approx 10^5$ *н/м²*:

$$\frac{p}{p_0} \approx \frac{40}{10^5} \sim 10^{-4}.$$

Этот простой пример показывает, как сильно может ухудшаться «вакуум» в запаянном сосуде, если не обезгазить предварительно стенки сосуда.

А. Митрофанов

◆

Ф367. *Построить изображение квадрата, даваемое собирающей линзой (рис. 12). Середина стороны квадрата, лежащей на главной оптической оси линзы, находится от линзы на расстоянии, равном фокусному*

Для построения изображения квадрата удобнее всего воспользоваться лучами, проходящими через фокусы линзы. Самым необходимым из них является луч $ABGF$ (рис. 12), идущий вдоль верхней стороны квадрата, поскольку изображения всех точек этой стороны должны лежать на самом луче GF или его продолжении. Построим еще ход луча AM, проходящего через левый фокус F линзы, и луча BN, как бы выходящего из того же фокуса. После линзы оба луча идут параллельно главной оптической оси линзы.

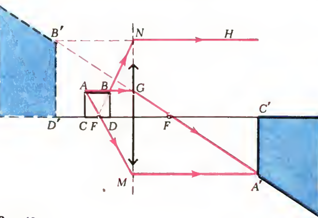


Рис. 12.

Действительное изображение A' точки A находится на пересечении лучей GF и MA'. Аналогично, мнимое изображение B' точки B находится на пересечении продолжений лу-

чей GF и NH. Для определения положения изображений C' и D' соответствующих точек C и D достаточно из A' и B' опустить перпендикуляры на главную оптическую ось. Изображения сторон AC и BD, перпендикулярных к оптической оси линзы, должны тоже быть перпендикулярными к оптической оси.

Для построения хода лучей AM и BN пришлось продолжить линзу в обе стороны так, как если бы она была большего размера. Это можно сделать на основании того, что любая часть линзы создает такое же изображение, как и целая линза (отличие лишь в освещенности).

Таким образом, изображение квадрата состоит из двух частей: действительной (часть угла справа от $A'C'$) и мнимой (часть угла слева от $B'D'$). Действительная часть является изображением половины квадрата, лежащей дальше фокальной плоскости, а мнимая — изображением половины квадрата, лежащей ближе фокальной плоскости линзы.

Б. Буховцев

◆

Ф368. *Ракета массы m стартует под углом α к горизонту. Двигатели ракеты работают t секунд, создавая тягу F и обеспечивая прямолинейное движение ракеты. Пренебрегая изменением массы ракеты и сопротивлением воздуха, определить высоту h, на которой прекращается работа двигателя.*

При решении задачи будем полагать, что система отсчета, связанная с Землей, является инерциальной и что движение ракеты ограничено пространством, где ускорение свободного падения $\mathbf{g}$ постоянно.

Запишем уравнение движения ракеты во время работы ее двигателей:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F} = \mathbf{R}.$$

Здесь $\mathbf{a}$ — ускорение ракеты, $\mathbf{R}$ — равнодействующая всех сил, действующих на ракету. Из условия задачи и предположения об инерциальности выбранной системы отсчета следует, что сила $\mathbf{R}$ (как и ускорение $\mathbf{a}$) должна оставаться постоянной в течение всего времени работы двигателей и составлять с горизонтом угол α (рис. 13). Поэтому высота h, на которую поднимется ракета за время t, равна

$$h = \frac{a_y t^2}{2} = \frac{R_y t^2}{2m},$$

где a_y и R_y — проекции векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{R}$ на координатную ось OY, направленную вертикально вверх.

Как видно из рисунка 13, должно выполняться равенство

$$(R_y + mg)^2 + (R_y \operatorname{ctg} \alpha)^2 = F^2.$$

Отсюда

$$R_y = mg\left(\sqrt{(F/mg)^2 - \cos^2 \alpha} - \sin \alpha\right) \sin \alpha,$$

и окончательно

$$h = \frac{R_y t^2}{2m} = \frac{gt^2}{2}\left(\sqrt{(F/mg)^2 - \cos^2 \alpha} - \sin \alpha\right) \sin \alpha.$$

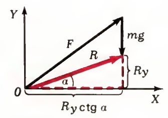


Рис. 13.

В. Погожев



Как рождаются, живут и умирают звезды

Кто из вас, юные читатели, глядя в ночное небо, усеянное звездами, не задумывался о том, как и из чего рождаются звезды, как они проходят свой жизненный путь, какой их ожидает конец... Эти вопросы не раз ставили перед собой и ученые, специалисты по физике звезд. И ответы приходили не сразу, а лишь после многих лет упорных поисков. Некоторые вопросы звездной эволюции не решены до сих пор.

Книга члена-корреспондента АН СССР И. С. Шкловского *) знакомит читателя с современным состоянием этой нелегкой проблемы. Автор ее — крупнейший астрофизик, широко известный своими трудами в СССР и за рубежом. В то же время И. С. Шкловский — прекрасный популяризатор науки. Его книга «Вселенная, жизнь, разум» была с интересом встречена широкими кругами читателей, выдержала несколько изданий **).

Интересно читать книгу, в которой рассказывается об удивительном мире звезд и туманностей, о пульсарах и сверхновых звездах, о черных дырах и гравитационных волнах. Но еще интереснее читать эту книгу, если знаешь, что ее автор сам «приложил руку» к решению многих описанных в ней проблем, что получаешь сведения, как говорится, из первых рук.

Перелистаем книгу. Короткое введение. В нем автор показывает нам, как развитие методов астрономии (создание радиотелескопов, применение спектрального анализа и т. п.) приводит к расширению наших знаний о Вселенной, о ее эволюции. Но, нарисовав грандиозную картину развития Вселенной, автор вдруг ставит на этом точку и обращается к совсем другому вопросу, который и составляет тему его книги: к эволюции звезд. Почему? «Ну хотя бы потому, — поясняет автор, — что 97% вещества в нашей Галактике сосредоточено в звездах».

И вот перед нами первая часть книги: «Звезды рождаются». Сначала автор знакомит нас с физическими свойствами звезд, с их основными типами. Мы узнаем, что есть звезды спокойные (стационарные), а есть пульсирующие и даже вспыхивающие. Затем следует знакомство с межзвездной средой — тем материалом, из которого образуются звезды. Но как происходит образование звезд? Где, при каких условиях? И автор ведет за собой читателя через облака межзвездной материи к газово-пылевым комплексам, которые он называет колыбелями звезд.

Теперь заглянем во вторую часть книги. В излучении звезд — смысл их существования. Таков лейтмотив этой главы, которая называется «Звезды излучают». Если бы звезды не излучали, они не были бы звездами. Излучение звезд делает их видимыми, оно дает нам все сведения, которыми мы располагаем об этих небесных телах. С другой стороны, исследование звездного излучения принесло огромную помощь физике — ведь земные источники излучения находятся в иных условиях, и ученые пока не могут воспроизвести звездное вещество в лаборатории.

Итак, звезда — это газовый шар, находящийся в состоянии равновесия. О каком равновесии идет речь? Оказывается, в применении к звездам понятий равновесия несколько. Приведем некоторые примеры. Давление внешних слоев звезды, обусловленное силами тяготения, уравновешивается суммой газового давления и давления, созданного излучением. Излучение находится в равновесии с веществом: количества энергии, излучаемой и поглощаемой веществом, одинаковы. Каждый выделенный объем звезды получает примерно столько же энергии, сколько отдает; это называется локальным термодинамическим равновесием.

Откуда же берется энергия, излучаемая звездами? Отвечая на этот вопрос, автор рассказывает о термоядерных реакциях, подводит читателя к одной из наиболее трудных проблем современной астрофизики — к проблеме нейтринного излучения Солнца. Это излучение могло бы рассказать нам о реакциях в недрах Солнца, но его мощность оказывается намного меньше, чем нужно.

Третья часть книги называется «Звезды взрываются». В ней речь идет о так называемых сверхновых звездах, вспышки, а точнее, взрывы которых связаны с конечным этапом звездной эволюции. Сначала (как и в предыдущих частях) дается общее знакомство, потом — обзор последствий вспышек сверхновых: образование радиотуманностей, генерация космических лу-

*) И. С. Шкловский. Звезды. Их рождение, жизнь и смерть. М., «Наука», 1975.

**) Рецензию на эту книгу вы можете прочитать в «Кванте», 1973, № 10.

чей. А в заключение — основной, но самый трудный вопрос: почему взрываются эти звезды? И автор, вложивший немалый вклад в решение проблем радиоизлучения остатков сверхновых и причин их взрыва, знакомит читателя с современным состоянием наших знаний о том и о другом.

И наконец, последняя часть книги: «Звезды умирают». Да, звезды, как и люди, прожив более или менее долгую жизнь (сроки которой измеряются сотнями миллионов и миллиардами лет), приходят к концу их жизненного пути. Кончаются запасы ядерного горючего: выгорел водород, выгорает гелий. Недолго и не у всех звезд дают энергию реакции с участием углерода и кислорода. Источники энергии иссякли. Звезда сжимается — давление, обусловленное излучением в ее недрах, упало, и одно газовое давление не в состоянии преодолеть гравитационное сжатие. Дальше перед звездой три пути, три возможных судьбы. Нет, звезда не вольна сделать выбор между ними, все зависит от ее массы, хотя приходится учитывать и некоторые другие факторы (например, вращение звезды, наличие магнитного поля).

Первый путь — для звезд с массой меньше солнечной (точнее, менее 1,2 массы Солнца) — превратиться в белого карлика, «сбросив» существенную часть своей массы, а затем постепенно остывать до полного прекращения свечения (автор называет это состояние «черным карликом»).

Другая судьба уготована звездам с массами от 1,2 до 2,4 массы Солнца. Звезда испытывает катастрофическое сжатие до очень малых размеров (в несколько десятков километров в диаметре) с одновременным «сбрасыванием» оболочки. Это и есть взрыв сверхновой звезды. Конечная стадия такого взрыва — образование нейтронной звезды (вещество такой звезды состоит из плотно «упакованных» нейтронов). Быстро вращающиеся нейтронные звезды, обладающие к тому же мощным магнитным полем, посылают радиосигналы в виде узкого направленного пучка лучей. Один раз за каждый оборот звезды (а период этого оборота порядка секунды) луч может задеть Землю. И тогда земные радиотелескопы примут короткий импульс. Периоды между импульсами выдерживаются с точностью до миллиардных долей секунды. Сколько волнений и споров породило их открытие в 1967 году! Источники этих радиоимпульсов, названные пульсарами, вскоре были отождествлены с давно предсказанными, но до тех пор не наблюдавшимися нейтронными звездами.

Звезды третьей судьбы — самые массивные. Они не могут удержаться на стадии даже нейтронной звезды: так велики гравитационные силы, сжимающие звезду. Звезда раздавливает самое себя, превращается в так называемую «черную дыру». Хотите знать, что это такое? Почитайте Шекспира. Да, да, Вильяма Шекспира, замечательного английского драматурга. Его слова приведены как эпиграф к четвертой части книги И. С. Шкловского. Вот они: «Быть званным в большую сферу и чтобы не было видно, как ты там движешься, — вот это и есть дыра!» («Антоний и Клеопатра»).

Много интересного найдет читатель в книге И. С. Шкловского. Но читать ее нелегко. Автор не боится приводить формулы, выражающие те или иные физические закономерности или соотношения, обсуждает сложные физические вопросы. Изложение не содержит ни малейших признаков упрощенчества, чем порой грешат некоторые популяризаторы. Шкловский не скрывает трудностей, стоящих перед наукой в том или ином вопросе. Может быть, юному читателю придется некоторые места читать по два-три раза или обращаться за помощью к старшим товарищам, к преподавателям, к специалистам. Но многое будет понятно и при «первом чтении». Конечно, браться за эту книгу должен только тот, кто искренне любит науку о Вселенной и стремится узнать, чем она живет и дышит в наши дни.

В. Бронштэн

Интересующимся космонавтикой

В наше время трудно найти людей, равнодушных к сообщениям о новых полетах космонавтов. Но задумывались ли вы над тем, какую колоссальную работу выполнили ученые, инженеры, рабочие и сами космонавты, прежде чем наступил заветный момент старта? Кому из вас не интересно научиться рассчитывать скорость движения ракеты, выводящей космический аппарат на заданную орбиту, разбираться в конструктивных характеристиках ракет, определять время разгона ракеты, рассчитывать необходимое количество горючего и окислителя, строить траектории полета космических аппаратов? Помочь в этом вам сможет новая книга «Основы космонавтики», написанная кандидатом педагогических наук, доцентом А. Марленским *).

Книга начинается с рассказа об истории космонавтики, с рассмотрения вопросов устройства и движения ракет (в частности, анализируются свободное движение ракеты в поле тяготения и движение ракеты под

*) А. Марленский. Основы космонавтики. М., «Просвещение», 1975.

действием силы тяги двигателя). Затем автор рассказывает об искусственных спутниках Земли, о полетах к Луне и различным планетам. Заключительные главы книги посвящены вопросам, касающимся условий космических полетов (рассказывается о различных опасностях, поджидающих космонавтов, о системах жизнеобеспечения космических кораблей и т. п.), а также научному и практическому применению космонавтики.

«Основы космонавтики» — это книга не для развлекательного чтения: в ней достаточно много физики и математики, различных задач и упражнений. Автор знакомит читателей со многими важными понятиями, без которых невозможно представить себе современную космонавтику. Прочитав книгу, вы узнаете о формуле Циолковского, о разновидностях ракетных двигателей и наиболее эффективных видах топлива; познакомитесь с основами астродинамики и небесной механики. Но главное, пожалуй, в том, что, вдумчиво изучив книгу и решив предлагаемые задачи, вы многому научитесь.

Работать с этой книгой, наверное, лучше всего группами на факультативных занятиях.

В заключение мы хотим дать вам несколько советов для дальнейшего чтения. Несомненно, очень интересна книга В. Левантовского «Механика космического полета в элементарном изложении» (М., «Наука», 1974), Маленькая энциклопедия «Космонавтика» (М., «Советская энциклопедия», 1970), а также статьи научно-популярного журнала АН СССР «Земля и Вселенная».

Е. Левитан

Спрашивайте — отвечаем

Читатель Н. Романенко спрашивает: могут ли металлы при каких-то условиях быть изоляторами? Возможно ли, чтобы изоляторы проводили ток?

На эти вопросы отвечает консультант отдела физики А. Володин.

Вещества, которые мы называем металлами, обладают рядом свойств, отличающих их от прочих веществ — неметаллов. Наиболее характерными из них являются большая электропроводность в сочетании с хорошей теплопроводностью. Противоположность металлам в этих свойствах составляют диэлектрики, или изоляторы. Следует, кроме того, отметить, что иногда какое-либо вещество по одному из этих свойств можно отнести к металлам, а по другому — нет. Поэтому между металлами и неметаллами не удается провести отчетливую границу.

Под действием внешних факторов, таких, например, как изменение температуры, давления и т. п., могут происходить как обратимые, так и необратимые переходы металл — диэлектрик и диэлектрик — металл. Приведем ряд примеров.

Такой типичный металл, как олово, при понижении температуры (и наличии затравок серого олова) может перейти в другую, неметаллическую модификацию — серое олово.

Некоторые окислы металлов претерпевают так называемые переходы Мотта: при достижении некоторой температуры они практически скачком из типичных диэлектриков становятся хорошими проводниками — металлами.

В последнее время в Институте высоких давлений АН СССР были обнаружены переходы в проводящее состояние таких совершенных изоляторов, как кварц (SiO_2) и окись алюминия (Al_2O_3). Эти переходы происходят при очень высоком давлении — порядка миллиона атмосфер. И, конечно, любой металл, переведенный в парообразное состояние при не слишком высоких давлениях, становится типичным диэлектриком.



Заочные физико-математические школы

За последние годы у нас в стране широкий размах приняло заочное физико-математическое обучение школьников. Вот неполный перечень заочных школ: Всесоюзная заочная математическая школа (ВЗМШ), Заочная физико-техническая школа при МФТИ (ЗФТШ), Северо-Западная ЗМШ, ЗМШ при Вильнюсском университете, ЗМШ при Минском университете, ЗМШ при Киевском университете, ЗМШ при Новосибирском университете.

В декабре 1975 года в Москве проходила первая Всесоюзная научно-практическая конференция по проблемам заочного математического обучения школьников, организованная научно-исследовательским институтом содержания и методов обучения (НИИ СиМО) Академии педагогических наук СССР и ВЗМШ. Конференция была приурочена к десятилетию работы старейшей из заочных школ — ВЗМШ, во многом она касалась опыта именно ВЗМШ.

Конференция была весьма представительной. В ее работе приняли участие 117 человек из 37 городов — преподаватели университетов, педагогических и технических вузов, научные работники, учителя средних школ, представители Министерства высшего и среднего специального образования СССР, редакций журналов «Математика в школе», «Квант», «Пионер».

В работе конференции приняли деятельное участие такие ведущие математики и педагоги нашей страны, как академик А. Н. Колмогоров, действительный член Академии педагогических наук СССР А. И. Маркушевич, член-корреспондент Академии педагогических наук СССР С. И. Шварцбурд, профессор Р. С. Черкасов, заведующая лабораторией обучения математики НИИ СиМО Г. Г. Маслова и др.

Перед заочной школой стоят большие задачи:

1) привить школьникам интерес к математике и ее приложениям в различных отраслях знания;

2) повысить уровень математической культуры учащихся;

3) предоставить возможность сельским школьникам углубленно и систематически заниматься математикой;

4) повысить общий уровень преподавания математики и связанных с нею учебных предметов.

На конференции отмечалось, что в ВЗМШ успешно решают эти задачи. Учащиеся заочной школы получают в свое распоряжение мастерски изложенные пособия, углубляющие и расширяющие материалы школьного курса математики. Выполняя задания, ребята учатся ориентироваться в мире книг и работать с научной литературой. Практика показывает, что эти пособия можно использовать в работе школьных математических кружков, летних математических школ.

Лучшие, многократно испытанные в работе ВЗМШ учебные пособия, созданные авторским коллективом под руководством члена-корреспондента Академии наук СССР И. М. Гельфанда, издаются массовым тиражом в серии «Библиотечка физико-математической школы» издательством «Наука». Вот некоторые из них: Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Кириллов А. А. «Метод координат»; Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Шноль Э. Э. «Функции и графики (основные приемы)»; Башмаков М. И. «Уравнения и неравенства»; Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л. «Прямые и кривые»; Кириллов А. А. «Пределы»; Гельфанд С. И., Гервер М. Л., Кириллов А. А., Кушниренко А. Г. «Комбинаторика, последовательности, пределы».

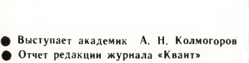
Интересные пособия издаются и в союзных республиках. Так, в издательстве «Вища школа» (УССР) вышли книги Дороговцева А. Я., Ядренко М. И. «Метод координат»; Ежова И. И., Скорохода А. В., Ядренко М. И. «Элементы комбинаторики»; Кованцова Н. И. «Геометрические преобразования». В издательстве «Минтис» — (ЛитССР) Ионушаускаса А. «Что такое топология» и др.

Другой «секрет» успеха ВЗМШ — в том, что ее руководители добились гармонического сочетания энтузиазма преподавателей и учащихся с прекрасной, продуманной до мелочей









● **Выступает академик А. Н. Колмогоров**

● **Отчет редакции журнала «Квант»**

● **Выступает действительный член Академии педагогических наук СССР профессор А. И. Маркушевич**

организацией работы. Энтузиазм стал в ВЗМШ традицией. Это и педагогическая увлеченность около 500 математиков: преподавателей, аспирантов, студентов, стремящихся передать ученикам страсть к любимому делу, и увлеченность самих учащихся математикой. Выполнив по два-три задания, учащиеся начинают чувствовать, что серьезные занятия точными науками немыслимы без задора так же, как без дисциплины и организованности труда. Правильный ответ на задачу без объяснения хода решения задачи в ВЗМШ, как правило, не засчитывается. Качество объяснения, его оригинальность, рациональность, полнота, ясность, постепенно вырабатывающаяся математическая культура языка — вот что в ВЗМШ ценится наиболее высоко.

Все эти факторы приводят к тому, что число учащихся в заочных школах все время растет. Так, если в 1964 году в ВЗМШ было 1300 учащихся, то сейчас в одной московской ее группе учатся около 2500 школьников. Массовость ВЗМШ придают группы «Коллективный ученик» — школьные математические кружки, которые работают по заданиям Всесоюзной математической школы под руководством своего учителя математики. Таких групп в ВЗМШ сейчас более 700, в них обучается более 10 тысяч человек. Группы «Коллективный ученик», составленные из учащихся 8—9 классов, принимаются в ВЗМШ без конкурса в сентябре — октябре по заявлению учителя математики. Кроме московской группы, ВЗМШ объединяет 29 филиалов при различных университетах и педагогических вузах, в которых обучается еще около 3700 школьников.

О работе Киевской заочной школы рассказала представитель этой школы Л. В. Ковалцова. Она отметила большую роль, которую играет телевидение в процессе заочного обучения. Другой формой заочного обучения является, как об этом говорил на конференции заместитель главного редактора «Кванта» М. Л. Смолянский, активное использование во внеклассной работе материа-

лов, публикуемых в журнале «Квант». Школьники решают задачи, помещенные в журнале, изучают публикуемые статьи, знакомятся с новым для них изложением традиционного школьного материала, ведут переписку с редакцией журнала по всем этим вопросам.

Получившие в последнее время широкое распространение заочные предметные школы (математические, физические, физико-математические, физико-технические, биологические и др.) являются перспективной и эффективной формой работы преподавателей вузов, ученых, научных работников и студентов со школьниками. Заочные школы вносят значительный вклад в решение поставленной партией и правительством задачи повышения научно-методического уровня преподавания в школах сельской местности, рабочих поселков, небольших городов, осуществления реального постоянного и квалифицированного руководства внеклассными занятиями школьников, проживающих вдали от научных и педагогических центров.

На конференции было подчеркнуто, что при заочном обучении учащимся очень важно время от времени встречаться со своими преподавателями — живого контакта ничто не заменит, — и поэтому ЗМШ должны участвовать в организации летних математических лагерей для школьников, проводить очные собеседования. Многое могут сделать организаторы из детских технических станций.

Даже из этого краткого обзора видно, как много полезного может принести школьникам учеба в ЗМШ. Мы призываем всех школьников, особенно сельских, попробовать свои силы, участвуя в работе заочных физико-математических школ. Приведем адреса, по которым вы можете обратиться в некоторые ЗМШ:

Москва — МГУ, мех-мат, ВЗМШ.
Долгопрудный, Московской обл., ЗФТШ при МФТИ.
Ленинград — Северо-Западная ЗМШ при ЛГУ.
Киев — ЗМШ при госуниверситете.
Минск — ЗМШ при госуниверситете.
Целиноград — пединститут, ЗМШ.
Вильнюс — ЗШЮМЛ при госуниверситете.
Тарту — ЗМШ при госуниверситете.
Пермь — ЗМШ при госуниверситете.
Уфа — Политехнический институт, ЗМШ.
Брянск — ЗЮМШ, газета «Брянский комсомолец».

В. Березин

III Всесоюзный слет юных астрономов

Необычно молодым будет в августовские дни и ночи состав наблюдателей Шемахинской астрономической обсерватории Академии наук Азербайджанской ССР.

Здесь, в живописной горной долине, на территории Обсерватории с 16 по 26 августа расположится палаточный городок «Звездный» III Всесоюзного слета юных астрономов. Из многих тысяч юных любителей науки о Вселенной на слет приглашено только 200 школьников — лучших представителей союзных республик.

Слет организуют и проводят Центральный Комитет ВЛКСМ, Министерство Просвещения СССР, Всесоюзное астрономо-геодезическое общество при АН СССР, Всесоюзное общество «Знание». Для участия в работе слета приглашены ученые из Москвы, Ленинграда, Одессы, Душанбе, Иркутска.

Программа слета обширна и разнообразна: конференция юных астрономов и смотр-выставка их творческих достижений, лекции ученых по актуальным проблемам исследования Космоса и диспут о внеземных цивилизациях, олимпиада и вечер вопросов и ответов, знакомство с работой Шемахинской обсерватории и, конечно, ежесуточные астрономические наблюдения. Наиболее опытные любители астрономии смогут повысить свою квалификацию в факультативах по астрофизике, астроприборостроению, по наблюдению Солнца, Луны, планет, комет, метеоров и переменных звезд. В исследовании именно этих астрономических объектов могут принимать участие сегодняшние школьники.

Выбор места слета не является случайным. Давняя дружба связывает юных астрономов Бакинского дворца пионеров им. Ю. Гагарина с учеными Шемахинской обсерватории. Каждое лето выезжают сюда для наблюдений кружковцы из Баку. Нередкий гость в астрономических лабораториях дворца пионеров директор Обсерватории академик АН Азербайджанской ССР Г. Ф. Султанов. Этим летом в Шемахинской обсерватории вступают в строй две новые астрономические башни. И сами башни, и установленные в них телескопы — дело умелых рук юных астрономов из Бакинского дворца пионеров и их руководителя С. И. Сорина.

Слет — не только школа юных астрономов. Организаторы слета видят одну из его задач в организации силами ребят Всесоюзной службы неба. Такая служба позволит привлечь школьников к систематическим патрульным наблюдениям комет, ярких болидов, новых звезд...

Б. Пшеничнер

Заочная физическая школа
при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова

Дорогие ребята! Заочная физическая школа при физическом факультете Московского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени государственного университета объявляет набор учащихся на 1976—77 учебный год.

В ЗФШ принимаются ученики *9 и 10 классов.* Зачисление в школу производится на основании результатов решения вступительного задания, публикуемого ниже.

Для поступления в ЗФШ необходимо выслать решения вступительного задания *до 15 октября* по адресу: Москва, 117234, Ленинские горы, МГУ, физический ф-т, Заочная физическая школа. Работа должна быть написана аккуратно на русском языке в школьной тетради. Вместе с решениями задач в конверт нужно вложить анкету, заполненную по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество . . . . *Петров Николай Иванович*
Класс *10*
Номер и адрес школы . . . . *школа № 6, ул. Перова, 23*
Профессия родителей и занимаемая ими должность
отец . . . . *токарь, мастер участка*
мать . . . . *бухгалтер*
Подробный домашний адрес . . *246045, БССР, г. Гомель, ул. Садовая, д. 31, кв. 24*
Член КПСС, ВЛКСМ *член ВЛКСМ.*

Зачисленные в ЗФШ получают в течение года задания Заочной физической школы по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Выполненные задания рецензируются и вместе с последующим заданием высылаются учащимся.

Учащиеся 9 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 10 класс на основании оценок, полученных за решение контрольных задач. Успешно окончившие ЗФШ получают справку об окончании Заочной физической школы при физическом факультете МГУ.

Вступительное задание

9 класс

1. Тело массы M лежит на горизонтальной плоскости. Коэффициент трения между телом и плоскостью равен μ. Какую минимальную силу нужно приложить к телу, чтобы сдвинуть его с места?

2. Два пластилиновых шарика одинаковой массы летят навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2 соответственно. Количество теплоты, выделившееся при столкновении, равно Q. Найти массу шариков (в результате столкновения шарики слипаются).

3. В жидкости с постоянной скоростью медленно опускается шарик радиуса R и массы m. Какой массой должен обладать шарик того же радиуса, чтобы он поднимался с той же скоростью, с какой опускается первый шарик? Плотность жидкости ρ; сила сопротивления пропорциональна скорости.

10 класс

1. К тонкому, вертикальному, вращающемуся вокруг своей оси стержню прикреплена нить длиной l. На другом конце нити подвешен шарик (рис. 1). Построить график зависимости расстояния r между шариком и осью стержня от угловой скорости вращения стержня ω. Считать, что при любом значении ω движение шарика успевает установиться. Объяснить полученную зависимость.

2. Два элемента с э. д. с. $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ и внутренними сопротивлениями r_1 и r_2 соответственно замкнуты одноименными полюсами через сопротивление R (рис. 2). Определить напряжение, показываемое вольтметром (сопротивление вольтметра велико).

3. В жидкость плотности $\rho_ж$ погружена пробирка с маслом плотности $\rho_м$ (рис. 3). Найти давление в точке A внутри пробирки. Геометрические размеры заданы на чертеже. Капиллярными явлениями пренебречь.

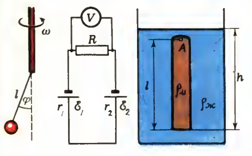


Рис. 1. Рис. 2. Рис. 3.

А. Антошин

Как расщепить атомное ядро в домашних условиях

Джон Слейт

Все вокруг нас — кровати, портсигары, резиновые сапоги — сделано из атомов (рис. 1). Более того, каждый из этих атомов имеет ядро, которое заслуживает расщепления ничуть не меньше прочих ядер. И все же простой человек не рискует заняться этим делом без помощи государства. Однако ядерному распаду давно пора по праву занять свое место в наших жилищах.

Руководствуясь нижеследующей инструкцией, каждый может соорудить свое собственное ядерное устройство. Атомы есть всюду, и принадлежат они всем.

Выбор атомов

Осмотревшись вокруг — дома или на улице, — соберите несколько атомов. Но лишь самые высококачественные из них пойдут в дело. С дешевым товаром хлопот не оберешься — это уж факт. Поэтому погнутые или поломанные атомы лучше не брать.

Натуральные атомы лучше по качеству, но обезвоженные тоже годятся. Нужно лишь добавить к ним воды. Больше всего для расщепления подходят атомы дерева. Возьмите длинноволокнистую древесину, только не узловатую, потому что эти узлы просто невозможно развязать, если они зажаты в синхротроне.



Рис. 1.



Рис. 2.



Рис. 3.

Разберите атом

На рисунке 2 дано схематическое изображение атома. Ядро находится в центре. Частицы внутри ядра — это ядерные частицы. Все остальное — всего лишь электроны, и, прежде чем приступить к делу, их непременно нужно отложить в сторону.

Целые атомы следует держать в камере *а* (см. рис. 2), ядра — в средней камере, а электроны — в дальнем конце. Такое расположение поможет в дальнейшем сразу найти то, что вам нужно и когда нужно. Небесполезно запомнить следующее: электроны совсем не выкидывайте. Они понадобятся потом.

Рисунок 2 выполнен с нарушением масштаба. Ядра всегда мельче целых атомов, поэтому камера *б* может быть сужена по вашему усмотрению.

Следите, чтобы под рукой всегда был запас атомов.

Соберите атом

Поскольку ядро слишком мало, вам понадобится ядерная ловушка. Считают, что наиболее эффективная ловушка — это сам атом. Так что возьмите ядро и окружите его электронами. Готовый атом поместите в атомный зажим, как показано на рисунке 3. Теперь это будет атом-цель (*АЦ*).

Сделайте синхротрон

После того как вы прочно закрепили *АЦ* лицевой частью наружу, ядро нужно чем-нибудь расщепить. Обычно его «бомбардируют» атомными частицами. Поскольку частицы движутся беспорядочно, их следует ускорить и направить в нужном направлении — обычно слева направо.

Для этого необходим синхротрон с переменным углом наклона. Чтобы собрать синхротрон, вам потребуется немного проволоки, магниты, транзисторы, спи-



Рис. 4.

рали, переключатели, диоды, регуляторы и, последнее (не по значению), генератор. Расположите все детали так, чтобы направить атомные частицы на ядро атома-цели с достаточной для его расщепления силой.

Синхротрон в атомных лабораториях Брукхейвена расположен по кругу с диаметром в одну милю. Если вы вспомните формулу $C = 2\pi R$, то мгновенно сообразите, что длина окружности приспособления будет равна 3,1416 мили. И хотя в конечном итоге вам захочется, видимо, иметь дело с сооружением брукхейвенского типа, лучше всего начать с атомов помельче, а к более крупным перейти как-нибудь в другое время.

Включение и выключение

Поместите атомные частицы в ускоритель, как показано на рисунке 3. Поставьте переключатель в положение «вкл.». Частицы поступят в синхротрон и ...«понеслось».

Дополнительные сведения

Вышеозначенная инструкция касается расщепления отдельного ядра. Однако, воодушевившись, вы захотите расщеплять все больше и больше. Поэтому сделайте следующее: каждое ядро обеспечьте синхротроном и поставьте все их в ряд параллельно друг другу. Понадобится еще какое-то количество проволоки.

Техника безопасности на первом плане

Во-первых и прежде всего, нужно найти способ защиты от неуправляемой реакции распада. Сначала решите, какое ядро расщепить, и добейтесь расщепления именно этого и никакого другого ядра. Значит, нужно как-то пометить выбранные ядра, скажем, краской. Другой способ — удалить из данной зоны все другие ядра. Затем можно без шума и крика расщепить оставшиеся.

Не забудьте улыбнуться

Наконец, об опасностях радиоактивности. Даже завзятые радиоактивисты не всегда принимают их в расчет.

Значит, накапливая атомное сырье, вы должны обезопасить себя и своих близких от гамма-лучей и прочих вещей, которые могут излучаться из бункера. Так что вдобавок к популярным у коллекционеров плакатам, вроде «Идет работа» и «Не забудьте улыбнуться», почему бы не вывесить такой: «Держитесь подальше».

Без аварий

Не забудьте, что с проблемой безопасности связана и критическая масса (*КМ*). Поскольку вы, наверное, не ставите себе целью аварию, то стоит попытаться взять под контроль факторы, ведущие к аварии. Один из них — *КМ*. Поэтому ваше сооружение должно быть рассчитано лишь на массы ниже критической. По ходу дела вы скоро наберетесь необходимого опыта.

Эдисон

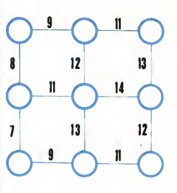
Не поддавайтесь унынию. Вспомните Томаса Эдисона. Он ведь изобрел электрическую лампочку (рис. 4) не в один присест. Сначала он работал на железной дороге и был бит.

Публикацию подготовил В. Л.

Головоломки

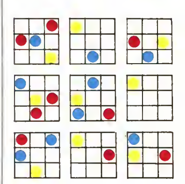
Квадрат цифр

Впишите в кружочки на рисунке цифры от 1 до 9 так, чтобы сумма цифр в любых двух соседних кружочках равнялась числу, написанному между этими кружочками.



Всюду по три

Вырежьте из картона девять квадратиков размером 3×3 клетки и нарисуйте на них цветные кружки так, как изображено на рисунке.



А теперь сложите из этих квадратиков квадрат 9×9, на больших диагоналях, вертикалях и горизонталях которого было бы ровно по одному кружку каждого цвета.

Л. Мочалов



Задачи

1. На рисунке изображен контур колбы, состоящий из дуг равных окружностей. Разрежьте ее по двум прямым так, чтобы из получившихся частей можно было сложить квадрат. Можно ли сложить аналогичным образом квадрат из второй фигуры?



2. Группа из 21 мальчика получила 200 орехов. Доказать, что как бы ребята ни разделили эти орехи, найдутся двое, которым достанется поровну орехов (может быть, ни одного ореха).

3. В 1815 году английский физик Чилдрен проделал такой опыт. Две платиновые проволочки одинаковых длин, но разных диаметров, он подключал к батарее Вольта. Один раз проволочки были соединены последовательно, а другой — параллельно. В первом случае раскалялась только тонкая проволочка, а во втором — только толстая.

И целых 25 лет не могли ученые объяснить результаты этого эксперимента. А вы можете?

У к а з а н и е: считать, что количество теплоты, отдаваемое проводником окружающему пространству, пропорционально площади поверхности проводника и разности температур проводника и окружающего пространства.

4. Найти все выпуклые многоугольники, обладающие следующим свойством: основание перпендикуляра, опущенного из любой точки внутри многоугольника на любую сторону, лежит внутри этой стороны.



Рис. Э. Назарова



Если вы хотите научиться решать математические задачи, вам надо попытаться овладеть более или менее общими подходами, приемами и методами математических рассуждений. Рассмотрим один весьма общий подход, который мы будем называть *правилом «крайнего»*.

Правило «крайнего» может быть кратко выражено словами «Рассмотрите крайнее!». Это правило есть попросту рекомендация рассмотреть объект, обладающий какими-либо «крайними», или, как говорят математики, *экстремальными* свойствами. Если речь в задаче идет о множестве точек на прямой, то правило «Рассмотри крайнее!» советует нам сосредоточить свое внимание на самой крайней точке множества (самой левой или самой правой). Если в задаче фигурирует некоторый набор чисел, то правило «крайнего» рекомендует рассмотреть наибольшее или наименьшее из этих чисел. Вот несколько примеров.

З а д а ч а 1. *На плоскости задано некоторое множество точек M такое, что каждая точка из M является серединой отрезка, соединяющего какую-либо пару точек того же множества M. Докажите, что множество M содержит бесконечно много точек.*

Очень часто бывает так, что ключ к решению задачи находят, решая более простую аналогичную задачу. Поэтому, прежде чем решать данную задачу, попробуем решить следующую задачу.

З а д а ч а 2. *На прямой задано множество точек M такое, что каждая точка из M является серединой отрезка, соединяющего две другие точки из M. Докажите, что множество M бесконечно.*

Предположим, что множество M конечно. Применим правило «крайнего»: если множество M — конечное, то среди его точек есть крайние — самая левая и самая правая. Рассмотрим одну из них, например, самую левую; обозначим ее буквой A. Точка A — крайняя и потому не может лежать внутри отрезка, соединяющего две другие точки множества M; значит, она не принадлежит M. Полученное противоречие и доказывает, что множество M не может быть конечным.

Приведем еще одно решение этой задачи, использующее правило «крайнего». Допустим снова, что множество M конечно, и рассмотрим длины отрезков, соединяющих точки из M. Этот набор чисел конечен. Применим

к нему наше правило в форме: «Рассмотри наибольшее!» — рассмотрим отрезок BC наибольшей длины. Ясно, что вне отрезка BC нет точек из M, иначе существовали бы отрезки с бо́льшими длинами. Таким образом, все точки множества M лежат на отрезке BC и, значит, ни B, ни C не удовлетворяют условию, то есть не принадлежат множеству M. Противоречие.

Вернемся теперь к задаче 1. Допустим, что множество M конечно. Снова применим правило «крайнего». Для этого зафиксируем положение плоскости и рассмотрим самую левую точку множества M, а если «самых левых» точек несколько, то возьмем самую нижнюю из них. Легко убедиться, что эта точка, обозначим ее через A, не может лежать внутри отрезка, соединяющего две точки множества M. Действительно, если бы такой отрезок существовал, то один из его концов находился бы либо левее A, либо на одной вертикали с точкой A, но ниже ее. Ни того, ни другого не может быть в силу выбора точки A.

Здесь, как и в задаче 2, тоже существует решение, основанное на рассмотрении попарных расстояний между точками множества M. Если множество M конечно, то и попарных расстояний конечное число, и среди них, руководствуясь правилом «крайнего», можно отыскать наибольшее. Пусть это будет расстояние между точками A и B. Но точка B является серединой некоторого отрезка CD, концы которого по условию принадлежат множеству M (рис. 1). Тогда легко доказать, что либо $|AD|$, либо $|AC|$ больше $|AB|$ (сделайте это самостоятельно, воспользовавшись тем, что медиана m, проведенная к одной из сторон треугольника, меньше полусуммы двух других сторон).

З а д а ч а 3. *На полях бесконечной шахматной доски написаны натуральные числа так, что каждое число равно среднему арифметическому четырех соседних чисел — верхнего, нижнего, правого и левого. Докажите, что все числа на доске равны между собой.*

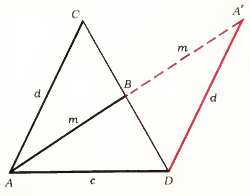


Рис. 1.

Решить эту задачу нам поможет правило «крайнего» в форме «Рассмотри наименьшее!». Среди натуральных чисел, записанных на полях шахматной доски, непременно существует наименьшее. В этом нетрудно убедиться. Пусть k — одно из данных чисел. Если среди чисел, записанных на доске, имеется единица, то она и является таким наименьшим числом (не существует натуральных чисел, меньших единицы). Если единицы на доске нет, посмотрим, нет ли там двойки. Если есть, то она и является наименьшим числом, если же нет, то поищем на доске тройку, и т. д. Не более чем за k шагов мы отыщем таким образом наименьшее число m. Рассмотрим поле P, на котором оно записано. Обозначим числа, записанные на соседних полях, буквами a, b, c и d. По условию $m=(a+b+c+d)/4$. Отсюда $a+b+c+$ $+d=4\,m$. В силу выбора числа m имеем $a\geqslant m$, $b\geqslant m$, $c\geqslant m$, $d\geqslant m$. Если хоть одно из этих неравенств было бы строгим, то мы имели бы $a+b+c+$ $+d>4m$, что противоречит условию. Значит, $a=b=c=d=m$.

Таким образом, если на некотором поле записано число m, то и на соседних полях записано число m. Отсюда следует, что на горизонтали,

содержащей поле P, записаны одни только числа m. Но любая вертикаль пересекает эту горизонталь, то есть она содержит число m, и, значит, все числа на вертикалях равны m. Значит, вообще все числа на доске равны m.

Задача 4. *На квадратной шахматной доске размером $n \times n$ расставлены ладьи с соблюдением следующего условия: если некоторое поле свободно, то общее количество ладей, стоящих на одной с этим полем горизонтали и на одной с ним вертикали, не меньше n. Докажите, что на доске находится не менее $n^2/2$ ладей.*

Эта задача — трудная. Однако умелое применение правила «крайнего» может существенно облегчить поиск решения. Именно, правило «крайнего» наталкивает на мысль рассмотреть ту из $2n$ линий доски — вертикалей и горизонталей, — на которой стоит меньше всего ладей. Может случиться, что есть несколько таких линий, «одинаково нагруженных» ладьями. Тогда выберем любую из них. Пусть эта линия — горизонталь (в противном случае повернем доску на 90° — вертикали станут горизонталями). Число ладей на этой горизонтали обозначим через k. Если $k \geqslant \frac{n}{2}$, то на каждой из n горизонталей не менее $\frac{n}{2}$ ладей, а всего на доске не менее $\frac{n^2}{2}$ ладей.

Пусть теперь $k < \frac{n}{2}$. На рассматриваемой горизонтали $n-k$ свободных полей, и каждая вертикаль, проходящая через такое свободное поле, содержит, как видно из условия, не менее $n-k$ ладей, а все такие вертикали — не менее $(n-k)^2$ ладей. Остальные k вертикалей содержат не менее чем по k ладей каждая (в силу выбора числа k). Всего на доске стоят не менее чем $(n-k)^2+k^2$ ладей. Остается доказать, что $(n-k)^2+k^2 \geqslant \frac{n^2}{2}$.

Это можно сделать разными способами, вот один из них:

$$[(n-k)^2+k^2]-\frac{n^2}{2}=$$

$$=\frac{n^2}{2}-2nk+2k^2=2\left(\frac{n^2}{4}-nk+k^2\right)=$$

$$=2\left(\frac{n}{2}-k\right)^2 \geqslant 0.$$

Если n — число четное, то можно найти удовлетворяющую условию расстановку, содержащую в точности $\frac{n^2}{2}$ ладей — достаточно поставить ладьи на все черные поля (или на все белые). Если число n — нечетное, то $\frac{n^2}{2}$ ладей расставить, соблюдая условия задачи, нельзя, так как число $\frac{n^2}{2}$ нецелое, но $\frac{n^2+1}{2}$ ладей расставить можно: одну ладью ставим на одно из угловых полей, а остальные — на поля того же цвета.

Аналогично решается следующая задача.

Задача 5. *Пусть n^2 неотрицательных целых чисел расположены в виде таблицы, содержащей n строк и n столбцов. При этом выполнено следующее условие: если на некотором месте таблицы записан нуль, то сумма чисел столбца и строки, содержащих этот нуль, не меньше n. Докажите, что сумма всех n^2 чисел не меньше $n^2/2$.*

Задача 6. *На плоскости заданы n точек. Никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что существует окружность, проходящая через три данные точки, не содержащая внутри ни одной из данных точек.*

Проведем окружность через каждую тройку точек. Получим некоторое множество окружностей (некоторые из них могут слиться в одну). Требуется доказать, что хотя бы

одна из этнх окружностей не содержнт внутрн себя ни одной нз данных точек. Правило «крайнего» может навестн на мысль рассмотреть нанменьшую окружность (окружность нанменьшего раднуса), но это в данном случае ннчего не даст (достаточно рассмотреть конфнгурацню нз такнх точек: 4 вершнны квадрата н его центр; нанменьшей будет окружность, опнсанная около квадрата, а она условню не удовлетворяет). Поступнм нначе. Попробуем решнть более простую задачу, а именно, будем искать окружность, проходящую через две нз данных точек н не содержащую точек внутрн себя. Измернм расстояння между каждымн двумя даннымн точкамн и, воспользовавшнсь правнлом «крайнего» в форме «Рассмотрн наименьшее!», возьмем пару точек A и B, находящихся на нанменьшем расстояннн друг от друга. Легко убедиться, что окружность, построенная на отрезке AB как на днаметре, удовлетворяет условию: остальные $(n-2)$ данные точкн удалены н от A, н от B не менее чем на $|AB|$, а потому расположены вне этой окружностн. Теперь проведем окружностн через точкн A н B и через каждую нз остальных $(n-2)$ точек. Вот среди этнх окружностей выберем наименьшую, как нам подсказывает правнло «Рассмотрн нанменьшее!». Пусть это будет окружность, проходящая через точкн A, B, C. Она — нскомая, потому что любая окружность, проведенная через точкн A н B и некоторую точку C' «серпа» (рнс. 2), меньше окружности, проходящей через точки A, B, C (докажнте это самостоятельно).

З а д а ч а 7. *На плоскости проведено n прямых ($n \geqslant 3$). Никакие две из них не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке. Эти прямые разрезают плоскость на части. Докажите, что какую бы из n прямых мы ни взяли, хотя бы одна из примыкающих к ней частей плоскости является треугольником.*

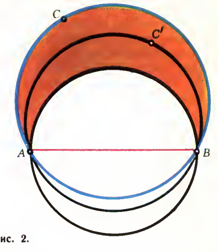


Рис. 2.

Пусть l_1 — одна нз данных прямых. Руководствуясь правнлом «крайнего», нз всех точек пересечения остальных прямых выберем ту, которая находнтся на нанменьшем расстоянни от прямой l_1. Пусть в этой точке, обозначнм ее буквой P, пересекаются прямые l_2 н l_3. Нетрудно доказать (сделайте это самостоятельно), что треугольннк, образуемый прямымн l_1, l_2 н l_3, составляет одну часть плоскостн н, следовательно, удовлетворяет условню задачн.

З а д а ч а 8. *Докажите, что не существует четверки натуральных чисел x, y, z, u, удовлетворяющих уравнению $x^2+y^2=3(z^2+u^2)$.*

Допустнм, что такие четверкн существуют. Рассмотрнм ту из ннх, для которой велнчина x^2+y^2 мнннмальна (еслн есть несколько четвёрок, у которых эта велнчина однпакова н мнннмальна, рассмотрнм одну нз ннх, любую). Пусть это будет четверка a, b, c, d. Из уравнення $a^2+b^2=3(c^2+d^2)$ вндно, что a^2+b^2 кратно трем. Но легко доказать, что a^2+b^2 делнтся на трн тогда н только тогда, когда н a, н b делятся на трн, потому что квадрат чнсла, не делящегося на трн, дает при деленнн на три в остатке еднннцу.

Следовательно, $a=3m$, $b=3n$, откуда

$$a^2+b^2=9m^2+9n^2=3(c^2+d^2).$$

Сокращая последиее равенство на 3, получнм:

$$c^2+d^2=3(m^2+n^2).$$

Мы нашли четверку чисел c, d, m, n, удовлетворяющую данному уравиенню, причем для этой четверкн

$$c^2+d^2<a^2+b^2,$$

а это иевозможио в силу выбора четверки a, b, c, d.

Задача 9. *На плоскости расположены n прямых ($n \geqslant 3$). Любые две прямые пересекаются и через каждую точку пересечения проходят не менее трех из данных прямых. Докажите, что все прямые пересекаются в одной точке.*

Пусть M — одна нз точек пересечеиия прямых. Допустнм, что она — не едннственная. Тогда найдется прямая l даниой снстемы, не проходящая через M. Множество точек пересечения прямых, не лежащнх на l, иепусто — оно содержнт, напрнмер, точку M. Рассмотрнте точку этого множества, блнжайшую к l (а еслн имеется несколько точек, иаходящнхся на миннмальном расстоянни от l, то выбернте одну из них, любую), и получ́ите протнворечие.

Вот еще одиа аналогичная задача.

Задача 10. *На плоскости заданы n точек ($n \geqslant 3$). Известно, что на всякой прямой, проходящей через 2 данные точки, расположена по крайней мере еще одна из данных точек. Докажите, что тогда все n точек лежат на одной прямой.*

Развнтием правнла «крайнего» является «правнло расположення», которое звучит так: «Расположите элементы нсследуемого множества в порядке возрастания или в порядке убывання (нли еще как-нибудь)!».



Задача 11. *Семь грибников собрали вместе 100 грибов, причем никакие двое не собрали одинакового числа грибов. Докажите, что есть трое грибников, собравших вместе не менее 50 грибов.*

Составнм «таблнцу первенства», поместнв в ней грибинков в порядке убывания числа собранных имн грнбов. Ясно, что рассматрнвать надо грибинков, занявшнх первые 3 места — онн собрали грнбов больше, чем любая другая тройка. Попробуем доказать, что онн собрали ие менее 50 грибов. Если грнбинк, занявший 3-е место, собрал 16 грибов нлн больше, то иа 2-м месте — грибннк, собравшнй не менее 17 грибов, а на первом — не менее 18 грнбов. Вместе оин собралн не меньше $16+17+18=51$ грнба. Еслн же грнбннк, занявшнй 3-е место, собрал не более 15 грнбов, то грнбинкн, занявшие места с 4-го по 7-е, собралн не более $14+13+12+11=50$ грибов. На долю первой тройки и в этом случае остается не менее 50 грнбов.



К статье «Принцип Ферма»

1. Вывод закона отражения (см. рис. 1). При распространении света в однородной среде пути наименьшего времени соответствует кратчайший путь. Пусть свет попадает из точки A в точку B, отразившись от зеркала в точке O. Путь, проходимый светом, равен

$$l = AO + OB = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c - x)^2}.$$

Для нахождения минимума функции $l(x)$ надо взять производную от $l(x)$ по x и

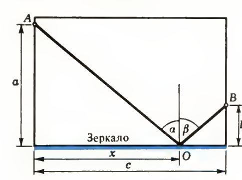


Рис. 1.

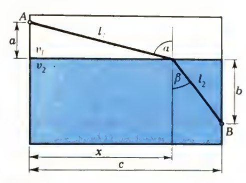


Рис. 2.

приравнять ее нулю:

$$\frac{dl}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{-2(c - x)}{2\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = 0,$$

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}};$$

$$\sin\alpha = \sin\beta, \quad \alpha = \beta.$$

2. Вывод закона преломления (см. рис. 2):

$$t = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2};$$

$$l_1 = \sqrt{a^2 + x^2};$$

$$l_2 = \sqrt{b^2 + (c - x)^2};$$

$$t = \frac{1}{v_1}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{b^2 + (c - x)^2};$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_1}\frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{1}{v_2}\frac{-2(c - x)}{2\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = 0;$$

$$\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{v_2}\frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}};$$

$$\frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{\sin\beta}{v_2},$$

или

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

К статье «Опыты с порошковыми фигурами»

1. Когда вы пальцем одной руки держитесь за лист электропроводной бумаги, а пальцем другой проводите по зубному порошку на бумаге, потенциал вашего тела равен потенциалу электропроводной бумаги. Поэтому разность потенциалов между движущимся пальцем и листом электропроводной бумаги равна нулю, и порошковые фигуры не образуются.

2. Для образования порошковых фигур необходима переменная разность потенциалов между пальцем и электропроводной бумагой. Если бы в цепи вообще не было тока, а существовала лишь эта разность потенциалов, то порошковые фигуры все равно бы получались. Именно поэтому малые токи в фазовом проводе сети могут быть обнаружены при помощи порошковых фигур.

3. Для опыта можно использовать любой фабричный фотоэлемент, например, типа СЦВ-4. Фотоэлемент нужно включить в разрыв фазового проводника сети после конденсатора. При освещении фотоэлемента порошковые фигуры покажут наличие фототока. Следует иметь в виду, что фотоэлемент обладает и темновым током, поэтому в опыте с помощью делителя напряжения нужно подобрать оптимальную разность потенциалов.

К задачам

(*см. с. 16*)

1. Равенство достигается лишь при $a=b=c$.

(*см. с. 29*)

1. Указание. Если R — радиус описанной окружности треугольника ABC, то $|BC|\cdot|AC|=2R\cdot h_c$.

2. $x=1,\ y=0$.

К статье «Задачи на доказательство»

(*см. «Квант» № 7*)

1. а) Согласно правилу вычитания векторов $\vec{CD}=\vec{OD}-\vec{OC}$. Если точки O и D не совпадают, то точки A, O, B и D являются вершинами ромба. В обоих случаях $\vec{OD}=\vec{OA}+\vec{OB}$. Следовательно, $\vec{CD}=\vec{OA}+\vec{OB}-\vec{OC}$.

Для вычисления $|CD|$ возведем это равенство в квадрат. Найдем скалярное произведение векторов $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$. Имеем $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$, т. е. $|AB|^2=|OA|^2+|OB|^2-2\vec{OA}\cdot\vec{OB}$, откуда $2\vec{OA}\cdot\vec{OB}=2R^2-c^2$.

Аналогично

$$2\vec{OB}\cdot\vec{OC}=2R^2-a^2,$$

$$2\vec{OC}\cdot\vec{OA}=2R^2-b^2.$$

Тогда получим

$$|CD|^2=3R^2+(2R^2-c^2)-(2R^2-a^2)-(2R^2-b^2)=R^2+a^2+b^2-c^2.$$

б) Из а) следует, что

$$R^2+a^2+b^2-c^2\geq 0.$$

Применяя формулы $a=2R\sin\widehat{A}$ и $\cos 2\widehat{A}=1-2\sin^2\widehat{A}$, получим нужное неравенство.

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $|CD|=0$, т. е. когда $\widehat{A}=\widehat{B}=30^\circ$ и $\widehat{C}=120^\circ$.

2. а) Докажите, что

$$\vec{OG}=\frac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}).$$

3. а) Указание. $\vec{DM}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}-\vec{OD}$. Вычислив скалярный квадрат вектора DM, получите формулу

$$|DM|^2=4R^2+a^2+b^2+c^2-(a_1^2+b_1^2+c_1^2),$$

где $a=|DA|$, $b=|DB|$, $c=|DC|$, $a_1=|BC|$, $b_1=|CA|$, $c_1=|AB|$, $R=|OA|$.

4. Указание. Докажите, что

$$\vec{OG}=\frac{1}{4}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}).$$

Решения задач и 2 и 4 можно получить также с помощью известной *формулы Лагранжа* (см. «Квант», 1975, № 3, с. 41).

5. Указание. Выразите векторы, входящие в доказываемое равенство, через векторы $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ и $\vec{OD}$, где O — произвольная точка.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(*см. «Квант» № 7*)

1. Из условия следует, что если A и B — друзья, то C либо их общий враг, либо их общий друг (иначе им троим не помириться). Поэтому в государстве есть два множества людей: люди из одного множества — друзья, а из разных — враги. Осталось всем людям из одного множества изменить свои отношения на противоположные.

2. $p=3$. Указание. Рассмотрите остатки, получающиеся при делении указанных чисел на 3.

3. Круг удвоенного радиуса (кольцо, если радиусы окружностей не равны).

4. Разбейте плоскость квадратной сеткой со стороной квадратов 60 *см*, в квадрате 180 *см*×180 *см* квадратики закрасьте в разные цвета, а потом периодически продолжайте раскраску.

5. Рейс займет больше времени, если города находятся на берегу реки.

К статье «Поиск предмета»

(*см. «Квант» № 7*)

Номер телефона

Надо задавать вопросы так, чтобы каждый последующий вопрос вдвое уменьшал количество «подозрительных» номеров. По условию имеется всего 10^7 вариантов, что больше 2^{23}, но меньше 2^{24}, поэтому 24 вопро-

сов хватит, а 23 может и не хватить. Сами вопросы можно задавать по-разному. Например, можно спросить: «Верно ли, что ваш номер не меньше 5 000 000?». Если ответ «да», то следующий вопрос может быть такой. «Не меньше ли он 7 500 000?» и т. д.

Еще две фальшивые монеты

а) Занумеруем монеты числами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Среди монет есть пара фальшивых. Это или пара 1, 2, или пара 1, 3, или 1, 4, или 1, 5, или 1, 6, или 2, 3 и так далее до 5, 6 — всего 15 возможных пар (выпишите их все). Будем записывать слева от тире номера монет на левой чашке, справа — на правой.

1) 1, 2, 3 — 4, 5, 6.

2) 1, 2, 4 — 3, 5, 6.

Если хотя бы при одном взвешивании равновесие нарушилось, то на чашке, которая перевесила, две из трех монет — фальшивые, а на другой чашке все монеты настоящие. Докажите сами, что в этом случае для выделения фальшивых монет достаточно еще двух взвешиваний.

Если же при первых двух взвешиваниях равновесие ни разу не нарушилось, то фальшивые монеты при обоих взвешиваниях находились на разных чашках весов. Значит, фальшивыми могут быть лишь пять пар: 1, 5; 1, 6; 2, 5; 2, 6; 3, 4. Осталось сравнить вес пар 1, 5 и 2, 6, а затем 1, 6 и 2,5.

б) Ответ: четыре взвешивания (доказать, что трех не хватит, довольно трудно).

Универсальные гири

Ответ: гири массой 1, 3, 9 и 27 граммов (попробуйте связать взвешивание с помощью этих гирь с представлением чисел в троичной системе счисления).

Отгадки с препятствиями

Для решения задачи достаточно 29 вопросов. Сначала спросите про первые 15 цифр, содержащихся в двоичной записи телефонного номера (вопросы типа: «Верно ли, что на k-м месте в двоичной записи стоит 0?»). Затем спрашиваете: «Солгали ли вы в одном из 15 ответов?»

Если «да», то ложен либо один из 15 ответов, либо последний. Методом «деления пополам» четырьмя вопросами узнаете, в каком же из 16 ответов ложь, а затем девятью вопросами выясняете оставшиеся цифры.

Если же на 16-й вопрос ответ «нет», значит, действительно я ни разу не лгал, и полученные вами 15 цифр — верные (в противном случае ложь содержалась бы в двух ответах: в одном из первых 15-ти и в 16-м, а это противоречит условию). Далее спросите про следующие семь цифр и опять задаете вопрос: «Солгали ли вы в одном из последних семи ответов?»

Если ответ «да», то тремя вопросами узнаете, где ложь, и еще двумя — последние две цифры; если ответ «нет», то спрашиваете про оставшиеся две цифры и «не лгали ли вы в этих двух ответах?» Двух вопросов хватит, чтобы узнать, где ложь.

К кроссворду

(см. «Квант» № 7)

1. Величина. 2. Действие. 3. Квадрант. 4. Паренаго. 5. Периметр. 6. Давление. 7. Кенотрон. 8. Механика. 9. Птолемей. 10. «Электрон». 11. Микрофон. 12. Гексаэдр. 13. Парадокс. 14. Апертура. 15. Кинетика. 16. Энтропия. 17. Мантисса. 18. Абсцисса. 19. Редуктор. 20. Бетатрон. 21. Динамика. 22. Максвелл. 23. Множимое. 24. Параметр. 25. Радиатор.

Номер оформили художники. *В. Карцев, Э. Назаров, А. Пономарева, Н. Смирнова, Э. Смирнов, М. Дубах*

Корректор *Н. Румянцева*

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 21/V 1976 г.
Подписано в печать 8 VII 1976 г.
Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 5,77 Т-11069
Цена 30 коп. Заказ 1069 Тираж 313 790 экз.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

ТИГРЫ В КЛЕТКЕ

В квадратной коробочке размером 5×5 размещены 24 плитки размером 1×1 (место одной плитки свободно). На четырех плитках нарисованы сторожа, еще на четырех — тигры, на шестнадцати — куски решетки.

В начальном положении тигры находятся в клетке, сторожа — вне клетки (пустое место — в центре коробочки). Передвигая плитки внутри коробочки, можно выпустить тигров на свободу, а сторожей спрятать от них в клетке. Как это сделать? Какое наименьшее число перемещений плиток для этого потребуется? А можно ли отдать одного сторожа «на съедение тиграм»?

Л. Мочалов



26 — 88

ПАУК-ГЕОМЕТР

Кружево, сплетенное пауком-крестовиком, явно имеет форму спирали. (Точнее, это — совокупность хорд некоторой спирали.) Что это за спираль? Если верить известному французскому натуралисту Ж. А. Фабру (1823—1915), крестовики плетут равноугольную (она же — логарифмическая) спираль. Это непрерывная кривая, которая пересекает под одним и тем же углом α все радиусы-векторы, исходящие из общего начала *O*. Хорды, принадлежащие одному и тому же углу, параллельны. Это признак, по которому можно распознать равноугольную спираль (однако, он недостаточен). Паутину можно получить и так: строим концентрические окружности, проводим из их общего центра лучи и хорды, соединяющие точки пересечения ближайших друг к другу лучей с окружностями. Хорды, принадлежащие одному и тому же углу, будут параллельны. Для того, чтобы получить спираль, остается в одном каком-нибудь угле не замыкать ломаную в многоугольник, а сделать переход к соседнему «многоугольнику».

Какую трактовку вы считаете более подходящей для творчества пауков-геометров?

В. Березин

Цена 30 коп.
Индекс 70345

